

Série A. N° 3985

N° d'ordre : 4386

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES
MATHÉMATIQUES

par

Salah AHMAD

1^{re} THÈSE

LES ELEMENTS ALEATOIRES DANS LES ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUE

2^e THÈSE

PROPOSITION DONNE PAR LA FACULTE

Soutenues Le 12 Decembre 1962

Devant La Commission D'Examen

MM.

PISOT

President

FORTET

NEVEU

}

EXAMINATEURS

2-2417

Série A. N° 3985

N° d'ordre : 4836

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES
MATHÉMATIQUES

par

Salah AHMAD

1^{re} THÈSE

LES ELEMENTS ALEATOIRES DANS LES ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUE

2^e THÈSE

PROPOSITION DONNE PAR LA FACULTE

Soutenues Le 12 Decembre 1962

Devant La Commission D'Examen

MM.

PISOT

President

FORTET

NEVEU

}

EXAMINATEURS

THESIS

1885

DE L'UNIVERSITE DE PARIS

1885

LE GABRIEL DE COCOTTE & SONS
MATHEMATIQUES

1885

1885

1885



1885

1885

1885

FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen M. ZAMANSKY

G. JULIA	T Analyse supérieur et Algèbre supérieure
DE BROGLIE	T Théories physiques
PRENANT	T Anatomie et Histologie comparées
GRASSÉ	T Evolution des êtres organisés
PREVOST	T Chimie organique
CHAUDRON	T Chimie appliquée
WYART	T Minéralogie et Cristal
TEISSIER	T Zoologie
MANGENOT	T Biologie Vég. (Orsay)
AUGER	T Physique quantitive et Relativité
MONNIER	T Physiologie Générale
PIVETEAU	T Paléontologie
ROCARD	T Physique (E. N. S.)
CARTAN	T Mathématiques (E. N. S.)
LAFFITTE	T Chimie générale
FAVARD	T Géométrie supérieure
COULOMB	T Physique du Globe
Mle COUSIN	T Biologie Animale (SPCN)
CHRETIEN	T Chimie minérale
DRACH	T Zoologie
KASTLER	T Physique (E. N. S.)
EPHRUSSI	T Génétique
RIVIERE	T Géologie SPCN et sédim.
GAUTHERET	T Biologie Vég. (P. C. B.)
LUCAS R.	T Recherches Physiques
THOMAS A.	T Biologie cellulaire
ARNULF	T Optique appliquée
MORAND	T Physique Enseignement
SOLEILLET	T Physique (P. C. B.)
FORTIER	T Mécanique exp. des Fluides
DANJON	T Astronomie
PETIT	T Biologie maritime
QUENEY	T Météorologie et dynamique atmosphérique
GALLIEN	T Embryologie
EICHHORN	T Botanique
DE CUGNAC	T Biologie Végétale (SPCN)

Mle CAUCHOIS	T Chimie Physique
THELLIER	T Physique du Globe
L'HERITIER	T Biologie Générale (Orsay)
GRIVET	T Radioélectricité (Orsay)
PONCIN	T Mécanique Générale
DUBREIL	T Arithmétique et théorie des Nombres
QUELET	T Chimie Organique
CAGNIARD	T Géophysique appliquée
CHAMPETIER	T Chimie macromoléculaire
CUVILLIER	T Micropaléontologie
JUNG	T Pétrographie
TRILLAT	T Microscopie et diffraction électronique
WIEMANN	T Chimie organique et struc.
JACQUINOT	T Spectroscopie et physique céleste (Orsay)
VASSY	T Physique de l'atmosphère
DESTOUCHES	T Théories Physiques
AMIEL	T Chimie Générale
HOCART	T Minéralogie et Cristallog.
J. P. MATHIEU	T Physique (Optique)
COUTEAUX	T Biologie animale (P. C. B.)
MAY	T Zoologie (Orsay)
CHOQUET	T Théorie des fonctions et Topologie
FELDMANN	T Biologie Végétale marine
GUINIER	T Physique des Solides (Orsay)
JOST	T Physiologie comparée
FORTET	T Calcul des Probabilités et Physique mathématique
SCHWARTZ	T Calcul diff. et Intégral
CHOUARD	T Physiologie Végétale
MALAVARD	T Aviation (Techn. Aéronaut.)
BRELOT	T Calcul diff. et intégral
NORMANT	T Synthèse organique générale
BENARD	T Chimie Minérale
BUVAT	T Botanique (E. N. S.)
DUGUE	T Statistiques Mathématiques
SOULAIRAC	T Psychophysiologie
ULRICH	T Physiologie Végétale
MARECHAL	T Optique théorique et Appl.
KIRRMANN	T Théories Chimiques
CHADEFAUD	T Botanique
Mle LE BRETON	T Physiologie de la nutri.
SALEM	T Mathématiques générales
LELONG	T Applic. de l'analyse à la géométrie
DEVILLERS	T Anatomie et Histologie Comp.

EHRESMANN	T Topologie Algébrique
FRANÇON	T Physique (S. P. C. N.)
GLANGEAUD	T Géographie phys. et Géologie dynamique
GODEMENT	T Mathématiques (M. P. C.)
PISOT	T Tech. Mathém. de la Phys
ROCH	T Géologie
SCHATZMAN	T Astrophysique
TERMIER	T Paléontologie stratig.
ZAMANSKY	T Mathématiques générales
LENNUIER	T Physique (M. G. P.)
RIZET	T Génétique (Orsay)
ROUTHIER	T Géologie appliquée
Mme TONNELAT	T Physique Théorique
DIXMIER	T Mathématiques (M. P. C.)
SOUCHAY	T Chimie générale
AIGRAIN	T Electrotechnique géné.
BRUSSET	T Chimie systématique
M. LEVY	T Physique théorique des hautes énergies (Orsay)
Mme CHAIX	T Chimie biologique
Mme HUREL-PY	Biologie Végétale (PCB)
PIAUX	T Chimie (M. P. C.)
BRUN	T Mécan. théorique des Fluides
LEDERER	T Chimie biologique
Mme DUBREIL	T Mathém. (Agrégation)
Mme LELONG	T Mathématiques (E. N. S.)
BELLAIR	T Géologie (S. P. C. N.)
COTTE	T Physique électricité
DUBOIS J. E	T Chimie organique
LAMOTTE	T Zoologie (E. N. S.)
MICHEL A.	T Chimie Minérale (Orsay)
OLMER	T Energétique générale
ROUAULT	T Electricité (Orsay)
GAUTHIER	T Mécanique appliquée
BARCHEWITZ	T Chimie Physique
BROSSEL	T Physique atomique
BUSER	T Physiologie comparée
CAMUS	T Physiologie Vég. BMPV
CASTAING	T Physique (Orsay)
CURIEN	T Minéralo. et Cristallog.
MOYSE	T Physiologie Végé. (Orsay)
NOIROT	T Evolution des Etres Org.
PANNETIER	T Chimie générale (Orsay)
POSSOMPES	T Zoologie
PULLMANN	T Chimie théorique

TEILLAC	T Physique Nucl. et Radioactivité
TONNELAT	T Biologie Physico-chim
VILLE	T Econmétrie
WILLEMART	T Chimie (P. C. B.)
DODE	T Chimie (Orsay)
FREYMANN	T Recherches Physiques
GUINOCHET	T Biol. Vég. SPCN (Orsay)
ROLLET	T Chimie (P. C. B.)
Mle JOSIEN	T Chimie S. P. C. N.
CHEVALLEY	T Géométrie algébrique et théorie des groupes
ARNOULT	T Electronique (Orsay)
CHAPELLE	T Physique (Orsay)
DELANGE	T Mathématiques (Orsay)
DENY	T Mathématiques Gén. Orsay
GERMAIN	T Mécan. théor. des fluides
LUCAS G.	T Géologie
ALLARD	T Chimie Physique
BERTHELOT	T Phys. Fondementale des Hautes Energies (Orsay)
BRICART	T Météorologie et phys. de l'Atmosphère
Mme ALBE-FESSARD	T Psychophysiologie
FRIEDEL	T Physique des Solides (Orsay)
M. JULIA	T Etudes des Moléculaires naturelles complexes
LENDER	T Biol. Animale (SPCN) Orsay
MAGAT	Physico-chimie des radio-éléments
Melle QUINTIN	T Electrochimie
MONOD	T Chimie du métabolisme
BENOIT	T Physiol. Anim. (Orsay)
DE POSSEL	T Analyse numérique
CHARLOT	T Chimie analytique
HAISSINSKY	T Radiochimie
LEMEE	T Physiol. Vég. BMPV (Orsay)
GUERIN	T Chimie M. P. C. (Orsay)
CHATELET M.	T Chimie (P. C. B.)
JEAN	T Physique Nucléaire (Orsay)
MATTLER	T Physique S. P. C. N.
MICHEL L.	Phys. Théor. des Htes Énergies (Orsay)
BERGERARD	T Zoologie (Orsay)
BERTEIN	T Electronique (Orsay)
BOUISSIÈRES	Chimie des Radioéléments (Orsay)
Mme COUTURE	T Thermodynamique et Méc. Physique
ELLENBERGER	T Géologie appli. s/le terr.
FRANC	Biol. Animale (P. C. B.)

SCHNELL	Botanique tropicale (Orsay)
STOLKOWSKI	Physiologie générale
ACHER	Chimie Biol. (Orsay)
BAUDOIN	Biologie animale P. C. B.
BEAUMONT	Biologie animale SPCN
BLAMONT	T Géophysique Ionosphère
BOURREAU	Botanique
CURIE D.	Physique (M. G. P.)
BURAND-DELGA	Géologie
FREON	T Chimie organique (Orsay)
HELLER	T Physiologie végétale
TORTRAT	T Calcul des Probabilités
CAILLEUX	Géologie (S. P. C. N.)
MAGNAN	T Physique (S. P. C. N.)
DAUDEL	T Mécanique ondulatoire appl. à la Chim. Théor. et à la Phys. Nucléaire
Mle FOURCROY	Biol. Végétale (SPCN)
Mme CHOQUET-BRUHAT	T Méc. Analytique et Méc. céleste
Mle VEIL	Physiologie Générale
LWOFF	T Microbiologie
SIESTRUNCK	T Mécan. Phys. et Expérим.
LACOMBE	T Métallur. des métaux Nucl.
BROCHARD	T Physique P. C. B. (Orsay)
CABANNES	T Mécanique générale
LESIEUR	T Mathématiques MPC (Orsay)
MAZET	T Mécanique générale (Orsay)
CAIRE	Géographie phys. et Géol. Dynamique
COMOLET	T Mécanique des Fluides
CORABOEUF	Physiologie Animale
DELLOUE	Physique de l'exosphère
GORENFLOT	Botanique II (Orsay)
HOUILLON	Biologie Animale P. C. B.
JULLIEN J.	Chimie P. C. B.
MALGRANGE	T Tech. Math. de la Phys.
OLIVIER	Antropologie
NOZERAN	T Botanique II (Orsay)
BLANC-LAPIERRE	Physique ENS. (Orsay)
CHEVAUGEON	T Botanique (Orsay)
KAHANE	T Mathématiques (Orsay)
SAMUEL	T Mathématiques ENS féminines
KOUGANOFF	T Astronomie (Orsay)
THIRY	T Mécanique céleste

SECRETAIRE GENERAL... R. POULLAIN.

INTRODUCTION

Les éléments aléatoires dans un espace vectoriel localement convexe, qui n'est pas un espace de Banach, ont pris de l'importance ces dernières années. Ainsi, pour des considérations physiques, Gelfand [18], Ito [17], Urbanik [39], Ulbrich [38], Parasiouk [28], ont étudié les distributions aléatoires afin de généraliser la notion de Processus stochastique .

Dans ce présent travail, nous entreprenons une étude systématique des éléments aléatoires dans un espace localement convexe séparé. Dans le premier chapitre, il y a tout d'abord quelques considérations générales : définitions, quelques théorèmes concernant les limites des suites d'éléments aléatoires et quelques considérations topologiques. Dans le § 2 du même chapitre, nous avons démontré un théorème qui permet, dans l'étude de l'espérance mathématique d'un élément aléatoire, de se ramener dans plusieurs cas, à l'étude de l'espérance mathématique d'un élément aléatoire dans R^k . L'existence de l'espérance mathématique d'un élément aléatoire scalairement intégrable dans le dual d'un espace vectoriel qui est limite inductive d'une famille d'espaces de Fréchet est démontrée. Des applications sont données. Au § 3 nous étudions la loi des grands nombres dans les deux cas suivants :

1°) Le cas d'un espace de Fréchet .

2°) Le cas du dual d'un espace vectoriel qui est la limite inductive d'une famille d'espaces de Fréchet .

Dans le chapitre II, nous étudions le problème du prolongement

gement d'une probabilité généralisée sur l'algèbre des ensembles cylindriques d'un espace vectoriel localement convexe, en une probabilité sur la σ - algèbre engendrée par ces ensembles. E. Mourier dans sa thèse a généralisé le théorème de Bochner, dans le cas d'un espace de Banach séparable et réflexif. Le Cam afin d'étudier le même problème et la compacité d'une suite de mesures a introduit la notion de mesure tendue : Soit E un espace régulier, $\mathcal{A}$ une sous-algèbre d'ensembles boréliens, λ une fonction d'ensemble additive définie sur $\mathcal{A}$. S'il existe, pour tout nombre positif ε un compact $K_\varepsilon \subset E$, tel que $\lambda(B - K_\varepsilon)$ soit inférieur à ε , quel que soit l'élément B de $\mathcal{A}$, alors λ est tendue.

En nous inspirons de ces travaux, nous avons introduit la notion de mesure de probabilité généralisée tendue, fortement tendue, et faiblement tendue. Une généralisation du théorème de Mourier est devenue ainsi possible dans les cas suivants : Espace de Fréchet réflexif (non nécessairement séparable) dual algébrique d'un espace vectoriel quelconque muni de la topologie faible, limite inductive stricte d'une suite d'espaces de Banach réflexif, et dans d'autres cas. Autant de résultats sont donnés pour les caractéristiques.

Le théorème de Glivenko-Cantelli incite à étudier les éléments aléatoires dans l'espace des mesures de Radon sur un espace localement compact. Ainsi dans le chapitre III, nous étudions les mesures (de Radon) aléatoires. Nous avons généralisé le théorème de Glivenko - Cantelli généralisé déjà par Wolfowitz, tout en traitant le problème d'une manière tout à fait différente.

Dans le chapitre IV nous étudions la probabilité de pouvoir prolonger une série à coefficients aléatoires au delà de son cercle

de convergence .

Je tient à témoigner ma reconnaissance toute particulière à Monsieur le Professeur FORTET, et le remercier de l'attention avec laquelle il a dirigé mon travail .

Que Monsieur le Professeur NEVEU rcçoive ici le témoignage de ma gratitude .

Je suis très reconnaissant à Monsieur le Professeur PISOT d'avoir bien voulu diriger ma seconde thèse et d'avoir présidé mon Jury .



CHAPITRE PREMIER

§ 1

ELEMENTS ALEATOIRES DANS UN ESPACE VECTORIEL

1. — PRELIMINAIRES

Dans tout ce travail, nous ne considérons que des espaces vectoriels réels. L'extension des résultats aux espaces vectoriels complexes ne présente aucune difficulté.

On dit qu'une partie M d'un espace vectoriel E est équilibrée, si pour tout $x \in M$, et tout $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $|\lambda| \leq 1$, on a : $\lambda x \in M$. Soient A et B deux parties de E . On dit que A absorbe B , s'il existe $\alpha > 0$ tel que l'on ait $\lambda A \subset B$ pour $\lambda \geq \alpha$. Une partie A de E est dite absorbante, si elle absorbe toute partie réduite à un point. On dit qu'une partie B d'un espace vectoriel topologique E est bornée si elle est absorbée par tout voisinage de 0 dans E . Si M désigne une partie d'un espace topologique, nous noterons par $\bar{M}$ et $\overset{\circ}{M}$, son adhérence et son intérieur respectivement.

On dit qu'un espace vectoriel topologique est localement convexe si sa topologie est définie par une famille de seminormes. Si E désigne un espace vectoriel localement convexe, nous désignerons par E' son dual (l'espace de toutes les formes linéaires continues sur E), par E^* son dual algébrique, par E'' son bidual (l'espace de toutes les formes linéaires continues sur E' lorsque on muni ce dernier de la topologie forte : topolo-

gie de la convergence uniforme dans toutes les parties bornées de E). E s'identifie en tant qu'espace sans topologie à un sous-espace de E'' qui s'identifie lui-même à un sous-espace de E''^* .

Soit (E, G) un couple d'espaces vectoriels mis en dualité par une forme bilinéaire $\langle x', x \rangle$, $x' \in G$, $x \in E$. C'est à-dire :

1. — Quel que soit $x \neq 0$ dans E , il existe $x' \in G$ tel que $\langle x', x \rangle \neq 0$
2. — Quel que soit $x' \neq 0$ dans G , il existe $x \in E$ tel que $\langle x', x \rangle \neq 0$

Pour toute partie M de E , on appelle polaire de M dans G l'ensemble :

$$M^\circ = \{ x' : x' \in G, \langle x', x \rangle \leq 1, \forall x \in M \}$$

Nous désignerons par $\sigma(E, G)$ ou simplement σ , la topologie faible sur E relativement à la dualité entre E et G , par E_s l'espace E muni de la topologie faible. E_s est localement convexe séparé. Rappelons que $G = E'_s$ et $E = G'_s$.

Dans le cas où E est muni d'une topologie, et $G = E'$, la topologie de E sera appelée topologie initiale. Toute topologie localement convexe séparée sur E , pour laquelle G reste le dual de E , sera appelée topologie compatible avec la dualité entre E et G . Nous désignerons par $\tau(E, G)$ la topologie la plus fine sur E compatible avec la dualité entre E et G : c'est la topologie de la convergence uniforme dans toutes les parties de G que sont convexes, équilibrées et $\sigma(E, G)$ -compactes. Signalons que si E et G sont deux espaces vectoriels en dualité, les ensembles bornés dans E sont les mêmes pour toutes les topologies compatibles avec la dualité entre E et G . Un espace localement convexe est dit tonnelé si tout ensemble convexe, équilibré, absorbant, et fermé dans E est un voisinage de O . Tout espace localement convexe métrisable et complet

(espace de Fréchet), et en particulier tout espace de Banach, est tonnelé.

Soit E un espace vectoriel localement convexe, E'' son bidual. Si E et E'' sont algébriquement identiques, nous dirons que E est semi - reflexif. pour que E soit semi-reflexif, il faut et il suffit que pour la topologie $\tau(E, E')$, toute partie fermée bornée de E soit compacte. On dit que E est reflexif s'il est semi-reflexif et si la topologie initiale sur E est identique à la topologie de la convergence uniforme dans les parties bornées de E' . Pour que E soit reflexif il faut et il suffit qu'il soit tonnelé et que pour la topologie $\tau(E, E')$, toute partie fermée et bornée de E soit compacte.

Soit E un espace vectoriel et soit $(E_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de sous-espaces vectoriels filtrante pour la relation $\subset$. pour chaque indice α , soit $\mathcal{T}_\alpha$ une topologie localement convexe compatible avec la structure d'espace vectoriel de E_α , et telle que, si $E_\alpha \subset E_\beta$ la topologie induite sur E_α par $\mathcal{T}_\beta$ est moins fine que $\mathcal{T}_\alpha$ soient φ_α l'application canonique de E_α dans E , $\mathcal{T}$ la topologie localement convexe la plus fine sur E , rendant continues les φ_α . $\mathcal{T}$ est par définition la limite inductive des topologies $\mathcal{T}_\alpha$. Si les E_α forment une suite croissante telle que $\mathcal{T}_\alpha$ soit égale à la topologie induite sur E_α par $\mathcal{T}_\beta$ pour tout $\beta \succ \alpha$, on dit alors que $\mathcal{T}$ est la limite inductive stricte des topologies $\mathcal{T}_\alpha$.

Dans un espace vectoriel topologique E , on dit qu'un ensemble $\mathcal{B}$ de parties bornées est un système fondamental de parties bornées, si pour toute bornée A de E , il existe une partie $B \in \mathcal{B}$ contenant A .

Une partie M d'un espace localement convexe E est dite totale si le sous-espace engendré par M est partout dense dans E . Pour plus de détails consulter [7], [8] et [9].

Soit E un ensemble quelconque muni de la topologie $\mathcal{C}$. Nous désignerons par $\mathcal{B}_{\mathcal{C}}$ la σ -algèbre des ensembles de Baire : c'est-à-dire la plus petite σ -algèbre pour laquelle toutes les fonctions numériques continues dans E sont mesurables et par $\hat{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$ la σ -algèbre des ensembles de Borel : c'est-à-dire la σ -algèbre engendrée par les ouverts de $\mathcal{C}$. Dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$ nous désignerons par $\mathcal{B}^n$ la σ -algèbre des ensembles boréliens de $\mathbb{R}^n$.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ désignera toujours un espace de probabilité. toute application $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ qui est $\mathcal{F} \cdot \mathcal{B}$ -mesurable et par définition une variable aléatoire.

2 — ELEMENTS ALEATOIRES DANS UN ESPACE VECTORIEL

Soient (E, G) un couple d'espaces vectoriels mis en dualité par une forme bilinéaire $\langle x', x \rangle$, $\mathcal{C}_G$ la σ -algèbre engendrée par la classe des sous-ensembles de la forme:

$$\{ x : x \in E, \langle x', x \rangle < \alpha \}$$

lorsque α parcourt la droite réelle et x' l'espace G .

Désignons, pour toute partie A' de G , par :

$$X'_{A'} : E \rightarrow \mathbb{R}^{A'}$$

l'application qui fait correspondre à tout $x \in E$ l'élément;

$$(\langle x', x \rangle)_{x' \in A'} \in \mathbb{R}^{A'}$$

Dans le cas où $A' = (x'_1, \dots, x'_n)$, on écrit X'_n au lieu de $X'_{A'}$. Autrement dit, l'application $X'_{A'}$ n'est autre chose que l'application projection de E (identifié à un sous-espace de R^G) dans $R^{A'}$. Il est évident que quel que soit $B \in \mathcal{B}^n$ et quelle que soit la suite finie $(x'_1, \dots, x'_n)$ on a :

$$X'_n(B) \in \mathcal{C}_G$$

Les ensembles de ce genre seront appelés ensembles cylindriques de $\mathcal{C}_G$. Ils forment une algèbre $\mathcal{L}_G$ que engendre $\mathcal{C}_G$. Notons en passant, que pour tout x , on a : $x + \mathcal{C}_G = \mathcal{C}_G$ et que si $B \in \mathcal{C}_G$ il existe une suite dénombrable S' qui dépend de B , telle que $B \in \mathcal{C}_{S'}$, où $\mathcal{C}_{S'}$ désigne la σ -algèbre engendrée par les ensembles de la forme :

$$\{x : \langle x', x \rangle < \alpha\} \quad x' \in S', \quad \alpha \in R$$

DEFINITION 1 : Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, (E, G) un couple d'espaces vectoriels en dualité. Toute application :

$$\xi : \Omega \longrightarrow E$$

qui est $\mathcal{F} \cdot \mathcal{C}_G$ -mesurable, est par définition un $\mathcal{C}_G$ -élément aléatoire ou simplement un élément aléatoire dans E , s'il n'y a aucune confusion à craindre.

Proposition 1 : Une application ξ de Ω dans E est un $\mathcal{C}_G$ -élément aléatoire si et seulement si $\langle x', \xi \rangle$ est une variable aléatoire, $\forall x' \in G$.

Proposition 2 : Si ξ_1, ξ_2 sont deux $\mathcal{C}_G$ -éléments aléatoires, alors $\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2$ est un $\mathcal{C}_G$ -élément aléatoire $\forall \alpha_1, \alpha_2$.

$\alpha_2 \in \mathbb{R}$. Autrement dit l'espace Ξ des $\mathcal{C}_G$ -éléments aléatoires forme un espace vectoriel.

La démonstration de ces deux propositions est immédiate.

Proposition 3 : Soit (ξ_n) une suite de $\mathcal{C}_G$ -éléments aléatoires telle que pour tout $\omega \in \Omega$, la suite $(\xi_n(\omega))$ converge vers $\xi(\omega) \in E$ pour la topologie faible, alors ξ est un $\mathcal{C}_G$ -élément aléatoire.

En effet, $\forall x' \in G$ on a :

$$\{ \omega : \langle x', \xi(\omega) \rangle < \alpha \} =$$

$$\bigcup_{k \geq 1} \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{i \geq n} \left\{ \omega : \langle x', \xi_i(\omega) \rangle < \alpha - \frac{1}{k} \right\} \in \mathcal{C}_G$$

Remarque . — La proposition 3 reste valable si la topologie $\sigma(E, G)$ est remplacée par une topologie plus fine qu'elle, et en particulier par une topologie quelconque compatible avec la dualité entre E et G .

Proposition 4 : Soient E et G deux espaces vectoriels en dualité. S'il existe un sous-ensemble C de G , tel que tout élément de G soit la limite d'une sous-suite de C (pour une topologie compatible avec la dualité entre E et G), alors :

$$\mathcal{C}_G = \mathcal{C}_C$$

En effet soit x' un élément quelconque de G et soit (x'_n) la sous-suite de C qui converge vers x' , On vérifie facilement que :

$$\{ x : \langle x', x \rangle < \alpha \} =$$

$$\bigcup_{k \geq 1} \bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{i \geq n} \left\{ x : \langle x'_i, x \rangle < \alpha - \frac{1}{k} \right\} \in \mathcal{C}_G$$

Exemples. — 1) E est le dual d'un espace métrisable et séparable G. On peut prendre pour C une suite partout dans G.

2) E est l'espace $\mathcal{D}$ des distributions qui est le dual de l'espace $\mathcal{D}$ des fonctions indéfiniment dérivable à support compact dans $\mathbb{R}^n$, muni de la topologie habituelle. $\mathcal{D}$ n'est pas métrisable, mais il y existe une suite qui vérifie la condition de la proposition 4 [41]

DEFINITION 2 : ELEMENTS ALEATOIRES NEGLIGEABLES ET
SCALAIREMENT NEGLIGEABLES [12] :

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, (E, G) un couple d'espaces vectoriels en dualité, $\xi : \Omega \rightarrow E$ un $\mathcal{C}_G$ -élément aléatoire.

a) S'il existe un $H \in \mathcal{F}$ tel que $P(H) = 1$, et $\xi(\omega) = 0, \forall \omega \in H$, nous dirons que ξ est négligeable.

b) Si $\forall x' \in G$ la variable aléatoire $\langle x', \xi \rangle = 0$ presque partout, nous dirons que ξ est scalairement négligeable.

Il est évident que $a \rightarrow b$. Réciproquement on a la proposition suivante.

Proposition 5. — S'il existe une partie dénombrable T' , totale dans G pour une topologie $\mathcal{G}$ compatible avec la dualité entre G et E, alors tout $\mathcal{C}_G$ -élément aléatoire scalairement négligeable est négligeable.

Posons :

$$A_{x'} = \{ \omega : \langle x', \xi(\omega) \rangle = 0 \} \quad \forall x' \in G$$

On a ;

$$P \left(\bigcap_{x' \in T'} A_{x'} \right) = 1$$

Soit maintenant $\omega \in \left(\bigcap_{x' \in T'} A_{x'} \right)$. T' étant totale dans $(G, \mathcal{C})$

et $\langle x', \xi(\omega) \rangle$ une application linéaire continue sur $(G, \mathcal{C})$ telle que $\langle x', \xi(\omega) \rangle = 0$ sur T' , on en déduit que $\langle x', \xi(\omega) \rangle = 0$ partout dans G , d'où :

$$\bigcap_{x' \in G} A_{x'} = \bigcap_{x' \in T'} A_{x'} \in \mathcal{C}_G \text{ et}$$

$$P \left(\bigcap_{x' \in G} A_{x'} \right) = 1$$

3. — QUELQUES CONSIDERATIONS TOPOLOGIQUES

Soient E et G deux espaces vectoriels en dualité. Il est très important de connaître les relations qui peuvent exister entre $\mathcal{C}_G$ et les topologies compatibles avec la dualité entre E et G .

Soient E un espace localement convexe séparé, E' son dual. Il y a lieu de considérer sur E plusieurs topologies compatibles avec la dualité entre E et E' , notamment :

1) La topologie initiale dont un système fondamental de voisinages de 0 est donné par les ensembles de la forme :

$$W_{\alpha, Q'} = \left\{ x : \sup_{x' \in Q'} |\langle x', x \rangle| \leq \alpha \right\}$$

où Q' est un sous-ensemble de E' , équicontinu dans $(E, \mathcal{C})$.

2) La topologie affaiblie $\sigma(E, E')$ dont un système fondamental de voisinages de 0 est donné par les ensembles :

$$W(x'_1, \dots, x'_n; \alpha) = \left\{ x : \sup_{1 \leq i \leq n} |\langle x'_i, x \rangle| \leq \alpha \right\}$$

Il y a lieu de considérer aussi d'autres topologies.

Il est évident que tout $W(x', \dots x'_n; \alpha)$ est un ensemble cylindrique, qui appartient donc à $\mathcal{C}_{E'}$. Mais comme $x + \mathcal{C}_{E'} = \mathcal{C}_{E'}$, on en conclut que $\mathcal{C}_{E'}$ contient une base de $\sigma(E, E')$.

Proposition 1 : Soient E un espace localement convexe séparable, E' son dual, S'il existe une partie totale dans E , alors $\mathcal{C}_{E'}$ contient une base de la topologie initiale $\mathcal{T}$ de E .

En effet, l'existence d'une partie totale dans E implique que toute partie équicontinue de E' est relativement compacte et métrisable pour $\sigma(E, E)$ [9, p. 66, prop. 3]. Donc quelle que soit la partie équicontinue $Q' \subset E'$, il exist une suite (x'_n) partout dense dans Q' pour $\sigma(E', E)$. Ce qui donne :

$$\begin{aligned} W_{\alpha, Q'} &= \{ x : \sup_{x' \in Q'} |\langle x', x \rangle| \leq \alpha \} \\ &= \{ x : \sup_{i \geq 1} |\langle x'_i, x \rangle| \leq \alpha \} \in \mathcal{C}_{E'} \end{aligned}$$

Corollaire : Si E est métrisable séparable, en particulier si E est un espace de Fréchet séparable ; alors, $\mathcal{T}$ étant la étant la topologie de E , on a :

$$\mathcal{C}_{E'} = \hat{\mathcal{B}}_{\mathcal{T}}$$

En effet, d'après la proposition 1, $\mathcal{C}_{E'}$ contient une base de $\mathcal{T}$ et comme tout ouvert de $\mathcal{T}$ est réunion dénombrable d'élément d'une base, $\mathcal{C}_{E'}$ contient tout ouvert de $\mathcal{T}$ Ce qui achève la démonstration.

Proposition 2 : Soit E le dual d'un espace vectoriel localement convexe séparable G . Alors toute partie $\sigma(E, G)$ -compacte est $\mathcal{C}_G$ -mesurable.

Il suffit de démontrer que si V' est un voisinage de 0 dans G , $V'^0 \in \mathcal{C}_G$. En effet V'^0 est équicontinu [9, p. 64, prop. 1]. Par conséquent il est relativement compact [9, p. 65, prop. 2], Mais V'^0 est $\sigma(E, G)$ -fermé [9, p. 52, prop. 2], donc compact et métrisable pour $\sigma(E, G)$ [9, p. 66, prop. 3]. D'autre part, on sait que $\mathcal{C}_G$ contient une base de $\sigma(E, G)$ [prop. 1], et que tout ensemble $\sigma(E, G)$ -compact est contenu dans un V'^0 [9, p. 64 et 55, prop. 1 et 2], d'où $V'^0 \cap \mathcal{C}_G$ contient tous les ensembles boréliens de V'^0 [20, p. 221].

Or, si A' désigne une partie dénombrable dense dans V' , on obtient :

$$V'^0 = \bigcap_{x' \in V'} \{ x : \langle x', x \rangle \leq 1 \} = \\ \bigcap_{x' \in A'} \{ x : \langle x', x \rangle \leq 1 \} \in \mathcal{C}_G$$

Ce qui achève la démonstration .

Soit maintenant E le dual d'un espace normé séparable G . La fonction $\|x\| = \sup_{\|x'\|=1} |\langle x', x \rangle|$ est $\mathcal{C}_G$ -mesurable et toutes les boules appartiennent à $\mathcal{C}_G$, bien que E muni de la topologie forte n'est pas nécessairement séparable.

Lemme de Sazanov [33, p. 407] : Soient E et G deux espaces vectoriels en dualité, $\mathfrak{T}$ une topologie sur E plus fine que $\sigma(E, G)$. Si (C_n) est une sous-suite croissante de sous-ensembles $\mathfrak{T}$ -compacts de E et si $C = \bigcup C_n$, alors :

$$\mathcal{C}_G \cap C = \mathcal{B}_{\mathfrak{T}} \cap C$$

La démonstration de ce lemme s'effectue facilement en remarquant que les C_n sont aussi $\sigma(E, G)$ -compacts, que $\mathcal{C}_G$ con-

tient une base de la topologie $\sigma(E, G)$ et que sur un ensemble K , toutes les topologie $\mathfrak{T}$, comparables, pour lesquelles $(K, \mathfrak{T})$ est compact, sont identiques.

Ce lemme permet de démontrer la proposition suivante :

Proposition 3 : Soit E le dual d'un espace de Fréchet G . Si on désigne par $\mathfrak{T}_c$ la topologie de la convergence uniforme dans les parties compactes de G , alors :

$$\mathcal{E}_G = \mathcal{B}_{\mathfrak{T}_c} = \mathcal{B}_\tau$$

Si en plus G séparable, alors on a :

$$\mathcal{E}_G = \hat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{T}_c}$$

En effet E est la réunion d'une suite croissante d'ensembles $\sigma(E, G)$ -compacts et $\mathfrak{T}_c$ -compacts [9, p. 64]. Il reste à appliquer le lemme de Sazanov.

Dans le cas où G est séparable, on sait que E est la réunion d'une suite croissante (C_n) de partie $\mathfrak{T}_c$ -compactes et métrisables, donc :

$$\mathcal{E}_G \cap C_n = \mathcal{B}_{\mathfrak{T}_c} \cap C_n = \hat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{T}_c} \cap C_n$$

d'où, si $A \in \hat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{T}_c}$, on obtient pour tout n :

$$A \cap C_n = A_n \cap C_n \text{ pour un } A_n \in \mathcal{B}_{\mathfrak{T}_c} = \mathcal{E}_G$$

Mais il est facile de vérifier que:

$$A = \bigcup_{i \geq 1} \bigcap_{n \geq i} A_n \in \mathcal{E}_G$$

Ce qui achève la démonstration.

4. — LOI D'UN ELEMENT ALEATOIRE DANS E

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, (E, G) un couple d'espaces vectoriels en dualité, et $\xi : \Omega \rightarrow E$ un $\mathcal{C}_G$ -élément aléatoire. Désignons par m la mesure $p \xi^{-1}$ définie sur $(E, \mathcal{C}_G)$ de la manière suivante :

$$m(A) = P(\xi^{-1}(A)) \quad \forall A \in \mathcal{C}_G$$

Nous dirons que m et $\mathcal{C}_G$ déterminent la loi de ξ .

Definition 1 : Indépendance stochastique : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, (E, G) un couple d'espaces vectoriels en dualité, $(\xi_i)_{i \in I}$ une famille de $\mathcal{C}_G$ -éléments aléatoires dans E . Soient I_1, I_2 deux parties quelconques de I , $\mathcal{F}_{I_i}$ ($i=1, 2$) la σ -algèbre engendrée par.

$$\bigcup_{i \in I_i} \xi_i^{-1}(\mathcal{C}_G)$$

Nous dirons que $(\xi_i)_{i \in I}$ est une famille de $\mathcal{C}_G$ -éléments aléatoires indépendants, si $\mathcal{F}_{I_1}$ et $\mathcal{F}_{I_2}$ sont indépendantes chaque fois que $I_1 \cap I_2 = \emptyset$.

Definition 2 : Soit (ξ_i) une suite d'éléments aléatoires dans un espace localement convexe. On dit que (ξ_i) est stationnaire si :

$$(\xi_1, \dots, \xi_m) \quad \text{et} \quad (\xi_{i+p}, \dots, \xi_{m+p})$$

ont la même loi $\forall i, m$ et p .

§ 2

ESPERANCE MATHEMATIQUE D'UN ELEMENT ALEATOIRE

Definition 1 : Soit (E, G) un couple d'espaces vectoriels en dualité, et ξ un C_G -élément aléatoire dans E . Nous dirons que ξ est scalairement intégrable, si $\forall x' \in G, E \langle x', \xi \rangle$ existe [12].

L'application :

$$I_\xi : G \longrightarrow R$$

qui fait correspondre à tout $x' \in G$ la valeur $E \langle x', \xi \rangle$, est par définition l'intégrale de ξ . I_ξ est une forme linéaire sur G , donc $I_\xi \in G^*$. Si $I_\xi \in E$ (identifié à un sous-espace de G), nous dirons que I_ξ est l'espérance mathématique de ξ et nous la noterons $E(\xi)$. $E(\xi)$ est donc, le seul élément de E , s'il existe, qui vérifie la relation suivante :

$$\langle x', E\xi \rangle = E \langle x', \xi \rangle \quad \forall x' \in G$$

Cette définition coïncide avec celle de Mourier [25] dans le cas où E est un espace de Banach, et $G = E$. En effet dans ces deux cas, les deux définitions coïncident avec celle de l'intégrale de Pettis.

Proposition 1 : Si $E\xi_1, E\xi_2$ existent, alors $E(\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2)$ existe $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in R$, et est égale à $\alpha_1 E\xi_1 + \alpha_2 E\xi_2$.

En effet $\forall x' \in G, E \langle x', \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 \rangle$ existe et est égale à

$\alpha_1 E \langle x', \xi_1 \rangle + \alpha_2 E \langle x', \xi_2 \rangle$. L'application :

$$x' \longrightarrow E \langle x', \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 \rangle$$

est donc la somme de deux applications $\alpha_1 E \xi_1, \alpha_2 E \xi_2$ qui appartiennent toutes deux à E . donc elle appartient elle-même à E . Ce qui achève la démonstration.

Nous allons démontrer une proposition qui permet, dans plusieurs cas, de se ramener, dans l'étude de l'espérance mathématique d'un élément aléatoire dans un espace vectoriel, à l'étude d'un élément aléatoire dans R^n :

Proposition 2 : Soient E et G deux espaces vectoriels en dualité, $x_0 \in G$, et H' une base algébrique de G . Une condition nécessaire et suffisante pour que $x_0 \in E$, est l'existence d'une partie $K \subseteq E$, compacte pour la topologie $\sigma(E, G)$, et telle que:

$$X'_{A'}(x_0) = (\langle x', x_0 \rangle)_{x' \in A'} \in X'_{A'}(K) (\subset R^{A'})$$

quel que soit la partie finie A' de H'

La condition est nécessaire. En effet, il suffit de prendre pour K l'ensemble formé du seul élément x_0 .

La condition est suffisante. En effet, soient K une partie de E qui est $\sigma(E, G)$ -compacte de E qui vérifie la condition de la proposition et H' une base algébrique de G . Désignons pour toute partie finie A' de H' , par $C_{A'}$ l'ensemble:

$$C_{A'} = K \cap \{ x : \langle x', x \rangle = \langle x', x_0 \rangle, A_{x'} \in A' \}$$

Il est évident que $C_{A'}$ est un sous-ensemble de E , qui est non vide et $\sigma(E, G)$ -fermé (par hypothèse).

Soient $A_1, \dots, A_n$ un nombre fini quelconque de parties de H' , et soit $A' = \bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i$. Il est évident que :

$$\emptyset \neq C_{A'} = C_{A'_1} \cap \dots \cap C_{A'_n}$$

Les $C_{A'}$ forment donc une famille de fermés dans le compact K , telle qu'un nombre fini d'éléments de cette famille admet une intersection non vide. Par conséquent leur intersection est elle-même non vide. Soit x un élément de E qui appartient à cette intersection. On a :

$$\langle x', x \rangle = \langle x', x_0 \rangle \quad \forall x' \in H'$$

Donc $x = x_0$. Ce qui achève la démonstration.

Proposition 3 : Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, (E, G) un couple d'espaces vectoriels en dualité, $\xi: \Omega \rightarrow E$ un $\mathcal{C}_G$ -élément aléatoire dans E qui est scalairement intégrable, I_ξ l'intégrale de ξ , et H' une base algébrique de G . Une condition nécessaire et suffisante pour que $E \xi$ existe est l'existence d'une partie K de E compacte pour la topologie $\sigma(E, G)$, et telle que :

$$X'_{A'}(I_\xi) = (E \langle x', \xi \rangle)_{x' \in A'} \in X'_{A'}(K) (\subset R^{A'})$$

quelle que soit la partie finie A' de H' .

En effet la condition de la proposition signifie que $I_\xi \in E$, (proposition 2). Ce qui achève la démonstration.

Remarques. — 1) Soient P une mesure positive bornée, qui n'est pas nécessairement une probabilité, et ξ une application $\mathcal{F}$ - $\mathcal{C}_G$ -mesurable. Si I_ξ désigne l'intégrale de ξ (définie de la même manière que l'intégrale d'un élément aléatoire), et si :

$$X'_{A'}(I_\xi) = \left(\int \langle x', \xi \rangle dP \right)_{x' \in A'} \in X'_{A'}(K)$$

(K étant un sous-ensemble de E $\sigma(E, G)$ -compact) quelle que soit la partie finie A' de H' , alors $I_\xi \in E$.

2) Soit $(x_i)_i \in I$ une famille d'éléments de G , et soit $(a_i)_i \in I$ une famille de nombres réels, qui a le même ensemble d'indices, alors on peut démontrer, en procédant comme pour la démonstration de la proposition 2, qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un élément $x_0 \in E$ telle que $\langle x_i, x_0 \rangle = a_i \forall x_i$, est l'existence d'un ensemble $\sigma(E, G)$ -compact K de E , tel que l'on ait, pour toute partie finie I_1 de I :

$$(a_i)_{i \in I_1} \in X'_{A'}(K)$$

où A' est la sous-famille $(x_i)_{i \in I_1}$.

Proposition 4 : Si ξ est un $\mathcal{C}_G$ -élément aléatoire tel que ξ appartient presque certainement à une partie K de E , convexe et faiblement compacte alors $E\xi$ existe et appartient à K .

En effet, quelle que soit la suite $(x'_1, \dots, x'_n)$ d'éléments de G , $X'_n(\xi)$ appartient p.c. au sous-ensemble convexe et compact $X'_n(K)$ de $\mathbb{R}^n$. ξ est donc scalairement intégrable et

$$EX'_n(\xi) = (E\langle x'_i, \xi \rangle)_{1 \leq i \leq n} \in X'(K)$$

Il ne reste qu'appliquer la proposition 3

Cette proposition généralise le fait bien connu qu'un point aléatoire dans $\mathbb{R}^n$ essentiellement borné admet une espérance mathématique. Cette proposition peut être démontrée directement [12]

Remarque. — Si P est une mesure positive bornée, et si ξ est une application $\mathcal{F}$ - $\mathcal{C}_G$ -mesurable telle que $\xi(\Omega)$ soit contenue dans un ensemble convexe et $\sigma(E, G)$ -compact K de E , alors :

$$I\xi \in P(\Omega)K$$

Proposition 5 : Soient (E, G) un couple d'espaces vectoriels, en dualité, ξ un C_G -élément aléatoire laplacien qui détermine sur C_G la mesure de probabilité m , et m^* la mesure extérieure induite par m sur l'ensemble des parties de E . S'il existe une suite croissante (C_n) de parties convexes et compactes dans E (pour une topologie compatibles avec la dualité entre E et G) telle que : $m^*(\cup C_n) = 1$, alors $E\xi$ existe.

En effet l'existence d'une suite (C_n) vérifiant les conditions de la proposition, implique que pour tout α : $0 < \alpha < 1$, il existe un n tel que :

$$(1) \quad m \left[\overline{x'_{A'}} (x'_{A'}(C_n)) \right] \geq \alpha$$

pour toute partie finie A' de G [Chp. II].

Prenons $\alpha > 1/2$ et considérons l'élément aléatoire laplacien :

$$x'_{A'}(\xi) \in R^{A'}$$

On a d'après (1) :

$$\text{prob.} \left[x'_{A'}(\xi) \in \overline{x'_{A'}}(C_n) \right] = m \left[\overline{x'_{A'}}(x'_{A'}(C_n)) \right] > 1/2$$

En remarquant que $\overline{x'_{A'}}(C_n)$ est convexe et compacte dans $R^{A'}$, la démonstration s'achève en appliquant successivement le lemme suivant et la proposition 3.

Lemme : Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un point aléatoire laplacien dans R^n . Si K est une partie convexe fermée dans R^n pour laquelle on a :

$$\text{prob.} [X \in K] > 1/2$$

alors $EX \in K$.

En effet le point EX est le point central de la distribution de X dans R^n , c'est-à-dire que si Π est un hyperplan passant

par EX, il y a une probabilité égale à $1/2$ pour que X soit au delà de $\mathbb{T}$.

Supposons que $EX \in \mathbb{K}$. Il existerait alors un hyperplan qui sépare strictement EX et K [8, p. 73], ce qui impliquerait que :

$$\text{prob. } [X \in K] \leq 1/2$$

d'où une contradiction. Ce qui achève la démonstration.

Remarque : Si ξ est scalairement intégrable, et est tel que pour toute partie finie A' de G , le point $EX'_{A'}(\xi)$ est un point central de la distribution de $X'_{A'}(\xi)$. Alors la proposition 5 reste valable même si ξ n'était pas laplacien.

Exemples. — 1) E est un espace de Fréchet séparable. En effet dans ce cas toute mesure positive bornée est portée par la réunion d'une suite de parties compactes [20, p. 40], et comme E est complet, on peut supposer les C_n convex [8, p. 81].

2) E est un espace semi-réflexif avec m fortement tendue [Chp. II].

3) E est un espace vectoriel, limite inductive stricte d'une suite croissante d'espaces de Banach réflexifs E_n .

En effet E est réflexif [9, p. 95, exerc. 17], et il admet un système fondamental dénombrable d'ensembles bornés [9, p. 5], donc $\sigma(E, E')$ - compacts.

4) E est le dual d'un espace de Fréchet G , muni de la topologie $\sigma(E, G)$. Dans ce cas E est la réunion d'une suite croissante de parties convexes et $\sigma(E, G)$ - compacts.

5) E est un espace de Banach réflexif. Ce n'est qu'un cas spécial du 4.

Cependant dans les deux derniers cas, on peut généraliser la proposition 4, comme on va le voir dans la suite.

La proposition 2 donne lieu à quelques applications algébri-

ques et topologiques. A titre d'exemple, nous allons démontrer une proposition qui généralise un théorème dû à Hahn [22, p. 23], et donner une démonstration simple du théorème de Mackey [9, p. 68].

Proposition 6 : Soient E un espace vectoriel localement convexe semi-réflexif, E' son dual, et $(x'_i)_i \in I$ une famille d'éléments de E' , et $(a_i)_i \in I$ une famille de nombres réels qui a le même ensemble d'indices. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un élément $x \in E$, telle que $\langle x'_i, x \rangle = a_i$ pour tout i , est l'existence d'un ensemble borné B dans E tel que l'on ait :

$$\left| \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i \right| \leq M = \sup_{x \in B} \left| \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i x'_i, x \right\rangle \right|$$

pour toute sous-famille finie $(x'_1, \dots, x'_n)$ de la famille $(x'_i)_i \in I$, et tout $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$.

La condition est nécessaire (évident).

La condition est suffisante. En effet, on ne restreint pas la généralité si on suppose B fermé, convexe, et équilibré [9, p. 5], c'est-à-dire $\sigma(E, E')$ -compact [9, p. 88].

Soit $(x'_1, \dots, x'_n)$ une suite finie d'éléments de $(x'_i)_i \in I$, B étant équilibré, convexe, et $\sigma(E, E')$ -compact, son image par l'application linéaire continue $\sum_{i=1}^n \alpha_i x'_i$ dans $\mathbb{R}$ est l'intervalle fermé : $[-M, M]$, ce qui implique d'après les conditions de la proposition que :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i \in [-M, M]$$

par conséquent, il existe au moins un $x \in B$, tel que :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \langle x'_i, x \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^n$$

Ce qui veut dire tout Hyperplan dans $\mathbb{R}^n$ qui passe par $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ rencontre $x'_n(B)$. $x'_n(B)$ étant convexe et compact dans $\mathbb{R}^n$, cela revient à dire que :

$$(a_i)_{1 \leq i \leq n} \in X'_n(B)$$

Il suffit pour achever la démonstration d'appliquer la remarque 2 sur la proposition 3.

Remarques — 1) Si E est le dual d'un espace tonnelé G , la proposition 6 reste vraie. En effet dans un tel espace tout ensemble borné pour $\sigma(E, G)$ est faiblement relativement compact [9, p. 65].

2) Dans le cas d'un espace de Banach réflexif, la condition de la proposition 6 devient :

$$\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i \right\| \leq M \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x'_i \right\|$$

où M est un nombre positif.

3) Si E est un espace localement convexe quelconque, et si on remplace borné par compact, la proposition 6 reste valable.

Theoreme de Macey : Soient E et G deux espaces vectoriels en dualité. Pour qu'une topologie localement convexe séparée $\mathcal{T}$ sur G soit compatible avec la dualité entre G et E , il faut et il suffit que $\mathcal{T}$ soit identique à une $\mathcal{B}$ -topologie, où $\mathcal{B}$ est un recouvrement de E formé de parties convexes, équilibrées et compactes pour la topologie faible $\sigma(E, G)$.

Soit $\mathcal{B} = (B_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de sous-ensembles de E

compacts, convexes et équilibrés, qui forme un recouvrement de E . $(B_\alpha^0)_{\alpha \in A}$ forme un système fondamental de voisinages de 0 pour la $\mathcal{U}$ -topologie (topologie de la convergence uniforme sur les B_α). Soit x une application linéaire sur G , continue pour la $\mathcal{U}$ -topologie. Démontrons que $x \in E$. Par Hypothèse il existe un B_α^0 tel que $\langle x', x \rangle \leq 1, \forall x' \in B_\alpha^0$. B_α^0 étant absorbant, $X'_{A'}(x) \in X'_{A'}(B_\alpha)$ pour toute les parties finies A' de G , d'où $x \in B_\alpha^0$ d'après la proposition 1.

La nécessité des conditions s'effectue comme d'habitude.

Proposition 7 : Soient E le dual d'un espace métrisable, tonnelé et séparable G , et ξ un $\mathcal{C}_G$ -élément aléatoire scalairement intégrable, alors $E\xi$ existe.

En effet, il existe une suite croissante (B_n) d'ensembles $\sigma(E, G)$ compacts et convexes [8, p. 66], qui forment un système fondamental d'ensembles bornés dans E . Les B_n sont en plus $\mathcal{C}_G$ -mesurables [§ 1, 3].

Soit (ξ_n) une suite de $\mathcal{C}_G$ -éléments aléatoires définis de la de la manière suivante :

$$\xi_n(\omega) = \xi(\omega) \text{ si } \xi(\omega) \in B_n \text{ et } \xi_n(\omega) = 0 \text{ si } \xi(\omega) \in \complement B_n$$

Il est évident que $E\xi_n$ existe pour tout n [proposition 4]. Soit I_ξ l'intégrale de ξ et $x' \in G$. Il est facile de vérifier que :

$$\langle x', E\xi_n \rangle = E\langle x', \xi_n \rangle = \int_{\xi(B_n)} \langle x', \xi \rangle dP \rightarrow E\langle x', \xi \rangle = \langle x', I_\xi \rangle$$

d'où $\cup \{E\xi_n\}$ est faiblement borné, donc relativement faiblement compact et $I_\xi \in E$. Ce qui achève la démonstration.

Soient maintenant E le dual d'un espace localement convexe G , et ξ un ζ_G -élément aléatoire. Soit H un sous-espace de G , H° le sous-espace de E orthogonal à H . H et E/H° sont mis en dualité par la forme bilinéaire canonique:

$$\langle x', \dot{x} \rangle = \langle x', x \rangle \text{ où } x' \in H, \dot{x} \in E/H^\circ, \text{ et } x \in \dot{x}$$

En plus la topologie $\sigma(H, E/H^\circ)$ est identique à la topologie induite sur H par la topologie $\sigma(G, E)$ [9, p. 54]. On peut donc identifier (algébriquement) E/H° à un sous-espace du dual M de H considéré comme sous-espace topologique de G . Soit ζ_H la σ -algèbre engendrée par les ensembles cylindriques de M , relativement à la dualité entre M et H , et soit :

$$\xi_H : \Omega \rightarrow M$$

l'application qui fait correspondre à chaque ω la classe $\dot{\xi}(\omega) \in E/H^\circ (\subset M)$ de $\xi(\omega)$ suivant la relation d'équivalence déterminée par H° dans E . Il est évident que:

$$\{ \omega : \langle x', \xi_H(\omega) \rangle < \alpha \} = \{ \omega : \langle x', \dot{\xi}(\omega) \rangle < \alpha \}, \forall x' \in H$$

d'où la conclusion que ξ_H est un ζ_H -élément aléatoire dans M . D'autre part si ξ est scalairement intégrable on a :

$$\int \langle x', \xi_H \rangle dP = \int \langle x', \xi \rangle dP \quad \forall x' \in H$$

ce qui implique que ξ_H est lui-même scalairement intégrable.

Désignons par $\mathcal{H}$ un ensemble de sous-espaces de G possédant la propriété suivante :

(P) pour qu'un élément x de G^* appartient à E , il faut et il suffit que sa restriction à tout $H \in \mathcal{H}$ soit continue.

Proposition 9 : Soient E le dual d'un espace localement convexe G , et ξ un ζ_G -élément aléatoire, et $\mathcal{H}$ un ensemble de sous-espace de G possédant la propriété (P), pour que $E\xi$ existe, il faut et il suffit que $E\xi_H$ existe pour tout H .

La condition est nécessaire : Supposons en effet que $E\xi$ existe, et soit $H \in \mathcal{H}$. Nous avons vu ci-dessus que ξ_H est scalairement intégrable. Désignons par θ_H la classe d'équivalence de $E\xi$ suivant H° , et par I_{ξ_H} l'intégrale de ξ_H . On vérifie directement que pour tout $x' \in H$ on a :

$$\langle x', \theta_H \rangle = \langle x', E\xi \rangle = E \langle x', \xi \rangle = E \langle x', \xi_H \rangle = \langle x', I_{\xi_H} \rangle$$

ce qui implique que :

$$I_{\xi_H} = \theta_H \in E/H^\circ \subset M$$

La condition est suffisante : En effet, soit I_ξ , l'intégrale de ξ , et supposons que $E\xi_H$ existe $\forall H \in \mathcal{H}$. Dans ces conditions pour tout $x' \in H$ on a :

$$\langle x', H\xi_H \rangle = \int \langle x', \xi_H \rangle dP = \int \langle x', \xi \rangle dP = \langle x', I_\xi \rangle$$

mais comme $E\xi_H$ est continue dans H (considéré comme sous-espace topologique de G), on en conclut que I_ξ est continue dans H , ce qui achève la démonstration.

Proposition 9 : Soient E le dual d'un espace vectoriel localement convexe G , ξ un ζ_G -élément aléatoire scalairement intégrable. Si $\mathcal{H} = (G_\alpha)$ est une famille de sous-espaces de G qui possède la propriété (P) et est telle que pour tout α , G_α soit métrisable, séparable, et tonnelé, alors $E\xi$ existe.

En effet, d'après la proposition 7, $E\xi_{G_\alpha}$ existe quel que soit α donc $E\xi$ existe d'après la proposition 8.

Corollaire 1 : Soit E le dual d'un espace vectoriel G qui est la limite inductive d'une famille (G_α) d'espaces métrisables,

et tonnelés. Si ξ est un $\mathcal{C}_G$ -élément aléatoire scalairement intégrable, alors $E \xi$ existe.

Corollaire 2 : Soient E le dual d'un espace vectoriel G qui est la limite inductive d'une famille (G_α) d'espaces de Fréchet, et ξ un $\mathcal{C}_G$ -élément aléatoire scalairement intégrable, alors $E \xi$ existe.

Soit I_ξ l'intégrale de ξ . Il suffit de démontrer que pour tout α , la restriction de I_ξ à G_α est continue [8, p. 26], et pour démontrer cela il suffit de démontrer que la restriction de I_ξ à tout sous-espace fermé et séparable (donc tonnelé) de G est continue. Ce qui achève la démonstration.

Exemples. — 1) Soit E l'espace des mesures de Radon sur un espace localement compact T . Si on considère la dualité entre E et l'espace $G = \mathcal{K}(T)$: espace des fonctions numériques continues dans T et à support compact, et si ξ désigne un $\mathcal{C}_G$ -élément aléatoire scalairement intégrable, alors $E \xi$ existe.

En effet E est le dual de $G = \mathcal{K}(T)$ considéré comme limite inductive des espaces de Banach $\mathcal{K}(K)$: espace des fonctions continues à support contenu dans le compact $K \subset T$, muni de la topologie de la convergence uniforme [10].

2) soit $E = \mathcal{D}'$ l'espace des distributions de Schwartz. Si on considère la dualité entre E et l'espace $\mathcal{D}$ des fonctions numériques indéfiniment dérivable dans $\mathbb{R}^n$ à support compact. Si ξ est un $\mathcal{C}_\omega$ -élément aléatoire scalairement intégrable, alors $E \xi$ existe.

En effet $E = \mathcal{D}'$ est le dual de l'espace $\mathcal{D}$ qui est la limite inductive d'une famille d'espaces de Fréchet séparables [35].

Proposition 10 : Soient E un espace de Fréchet séparable dont la topologie est définie par une suite croissante (p_i) de

semi-normes, et ξ un $\mathcal{C}_{E'}$ -élément aléatoire. Si $Ep_i(\xi)$ existe pour tout i , alors $E\xi$ existe.

En effet, soit $x' \in E'$. Comme x' est continue, il doit y exister une semi-norme $p \in (p_i)$ et un nombre positif a tels que :

$$|\langle x', x \rangle| \leq ap(x) \quad \forall x \in E$$

d'où $|\langle x', \xi \rangle| \leq ap(\xi)$. Mais comme $Ep(\xi)$ existe, $E\langle x', \xi \rangle$ exisist. D'autre par ξ appartient presque certainement à une suite croissante (C_n) d'ensembles compacts [20, p. 40], qui sont $\mathcal{C}_{E'}$ -mesurables [§ 1, 3, proposition 2]. Définissons maintenant une suite d'éléments aléatoires (ξ_n) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi \quad \text{si } \xi \in C_1 & \text{et} & \quad \xi_1 = 0 \quad \text{si } \xi \notin C_1 \\ \xi_n &= \xi \quad \text{si } \xi \in C_n - C_{n-1} & \text{et} & \quad \xi_n = 0 \quad \text{si } \xi \notin (C_n - C_{n-1}) \end{aligned}$$

On obtient successivement :

$$1. \quad p_i \left(\sum_{k=1}^n \xi_k \right) = \sum_{k=1}^n p_i(\xi_k) \leq p_i(\xi) \quad \forall i$$

2. — En passant, si nécessaire à une sous-suite de la suite $\theta_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$, et en appliquant la méthode du diagonale, on peut supposer que :

$$Ep_i(\xi_n) = \sum_{k=1}^n Ep_i(\xi_k) \rightarrow Ep(\xi) \quad \forall i$$

3. — Comme $\xi_n \in C_n$ p. c., $E(\xi_n)$ existe [proposition 4].

4. — La suite $h_n = \sum_{k=1}^n E\xi_k$ forme une suite de Cauchy. En

effet, pour $m \geq n$, on a :

$$\begin{aligned} p_i(h_m - h_n) &= p_i(E\xi_{n+1} + \dots + E\xi_m) = Ep_i(\xi_{n+1} + \dots + \xi_m) = \\ &= Ep_i(\xi_{n+1}) + \dots + Ep(\xi_m) \rightarrow 0 \quad (\text{d'après 2}) \end{aligned}$$

5. — h_n tend vers un élément x_0 de E .

6. — $\langle x', x_0 \rangle = E\langle x', \xi \rangle \quad \forall x'$. En effet $\langle x', x_0 \rangle =$

$$= \lim \langle x', h_n \rangle = \lim \sum_{k=1}^n E \langle x', \xi_k \rangle = E \langle x', \xi \rangle.$$

Ce qui achève la démonstration.

Corollaire 1 : (Mourier) : Si ξ est un élément aléatoire dans un espace de Banach séparable, tels que $E \|\xi\|$ existe, alors $E\xi$ existe.

Corollaire 2 : Soient E un espace de Fréchet séparable, E' son dual, ξ un $\mathcal{C}_E$ -élément aléatoire tel que ξ appartient presque certainement à un ensemble borné de E , alors $E\xi$ existe.

Il est en effet évident que ξ est scalairement intégrable. D'autre part, soit (p_i) une suite croissante de semi-normes qui détermine la topologie de E . Pour tout i , $p_i(\xi)$ est une v. a. essentiellement bornée. Donc $Ep_i(\xi)$ existe. Il reste à appliquer la proposition 10.

§ 3

LOI FORTE DES GRANDS NOMBRES

Nous nous proposons d'étudier ce problème dans les cas suivants :

1. — E est un espace de Fréchet séparable.
2. — E est le dual d'une limite inductive d'espaces de Fréchet séparables.

Proposition 1 : Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité, E un espace localement convexe, $\mathcal{T}$ sa topologie initiale, E' son dual, T' une partie totale dans E' pour $\sigma(E', E)$, et (ξ_n) une suite de $\mathcal{C}_{E'}$ -éléments aléatoires. Pour que ξ_n converge (pour $\mathcal{T}$) p. c. vers un $\mathcal{C}_{E'}$ -élément aléatoire ξ , il faut et il suffit qu'il existe un $H \in \mathcal{F}$ tel que $P(H) = 1$, et tel que pour tout $\omega \in H$, et tout $x' \in T'$, $\bigcup_{i \geq 1} \{ \xi_i(\omega) \}$ soit $\mathcal{T}$ -relativement compact, et $\langle x', \xi_i(\omega) \rangle$ converge.

Les conditions sont nécessaires : En effet, si (x_n) converge dans E , $\bigcup_{i \geq 1} \{ x_i \}$ est σ -relativement compact, et (x_n) converge faiblement.

Les conditions sont suffisantes : En effet, soit $\omega \in H$. $\bigcup_{i \geq 1} \{ \xi_i(\omega) \}$ étant $\mathcal{T}$ -relativement compact, il est $\sigma(E, E')$ -relativement compact, et par conséquent la suite $(\xi_i(\omega))$ a au

moins un point adhérent $\xi(\omega)$, pour $\sigma(E, E')$. $\forall x'$, le point $\langle x', \xi(\omega) \rangle$ est donc adhérent à la suite $\langle x', \xi_i(\omega) \rangle$. Mais comme $\forall x' \in T', \langle x', \xi_i(\omega) \rangle$ converge, on obtient :

$$\langle x', \xi(\omega) \rangle = \lim \langle x', \xi_i(\omega) \rangle \quad \forall x' \in T'$$

Supposons maintenant que $\xi_i(\omega)$ ne converge pas faiblement vers $\xi(\omega)$. Il existerait donc une sous-suite $(\xi_{i_k}(\omega))$ telle que $\xi(\omega)$ ne lui soit pas adhérent. $\bigcup_{k \geq 1} \{ \xi_{i_k}(\omega) \}$ étant un sous-ensemble d'un ensemble faiblement relativement compact, il existe au moins un point $\xi'(\omega) \in E$ qui est faiblement adhérent à la suite $(\xi_{i_k}(\omega))$. Par conséquent $\forall x' \in T', \langle x', \xi'(\omega) \rangle$ doit être adhérent à $(\langle x', \xi_{i_k}(\omega) \rangle)$, mais cette suite est convergente (comme sous-suite d'une suite convergente), ce qui implique que pour tout $x' \in T'$, on a :

$$\langle x', \xi'(\omega) \rangle = \lim_k \langle x', \xi_{i_k}(\omega) \rangle = \lim_i \langle x', \xi_i(\omega) \rangle = \langle x', \xi(\omega) \rangle$$

Comme T' est totale pour $\sigma(E', E)$, on en conclut que :

$$\xi'(\omega) = \xi(\omega)$$

ce qui est absurde ; d'où $(\xi_i(\omega))_i$ converge bien faiblement vers $\xi(\omega)$. Mais $\bigcup_{i \geq 1} \{ \xi_i(\omega) \}$ étant relativement compact pour $\mathfrak{C}$, $(\xi_i(\omega))$ converge aussi vers $\xi(\omega)$ pour $\mathfrak{C}$.

Achevons la définition de ξ , en posant $\xi(\omega) = 0 \forall \omega \in \complement H$, et démontrons que ξ est un $\mathcal{C}_E$ -élément aléatoire. Soit $\xi_i : \Omega \rightarrow E$ définie de la manière suivante :

$$\xi_i(\omega) = \xi_i(\omega) \text{ si } \omega \in H \text{ et } \xi_i(\omega) = 0 \text{ si } \omega \in \complement H$$

Il est évident que ξ_i est un $\mathcal{C}_{E'}$ -élément aléatoire. D'autre part, $\xi_i(\omega)$ converge vers $\xi(\omega)$ quel que soit ω , ce qui prouve bien que ξ est $\mathcal{C}_E$ -élément aléatoire [§ 1, 2, proposition 3].

Remarque : 0. Hans a démontré une proposition analogue,

dans le cas d'un espace de Banach ainsi que dans le cas de l'espace des distributions de Schwartz [21].

Proposition 2 : Soient $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ un espace de probabilité, E un espace de Fréchet séparable dont la topologie est définie par une suite croissante de semi-normes (p_i) , et (ξ_i) une suite stationnaire de $C_{E'}$ -éléments aléatoires. Alors, si $\forall i, E_{p_i}(\xi_i)$ existe, il existe un $C_{E'}$ -élément aléatoire ξ_0 tel que :

$$1/n \sum_{i=1}^n \xi_i \rightarrow \xi_0$$

pour la topologie de E p. c.

1. — E étant métrisable séparable, il existe dans E' une partie T' dense partout pour la topologie $\sigma(E', E)$ [9, p. 66]. $E\xi_i$ existe [§ 2, proposition 10] ; on a donc d'après le théorème bien connu de Birkoff : $1/n \sum_{i=1}^n \langle x', \xi_i \rangle$ converge p. c. pour une x' donnée ; mais comme T' est dénombrable, il existe un $H_0 \in \mathcal{F}$ tel que $P(H_0) = 1$, et tel que : $1/n \sum_{i=1}^n \langle x', \xi_i(\omega) \rangle$ converge $\forall x' \in T'$, et $\forall \omega \in H_0$.

2. — Les ξ_i étant tous de même loi, et E métrisable et séparable, on peut trouver une suite croissante (C_k) de sous-ensembles compacts de E , tel que $\xi_i \in \bigcup_{k \geq 1} C_k$ p. c. $\forall i$ [20, p. 40]. D'autre part, E étant complet, on ne restreint pas la généralité si on suppose que les C_k sont équilibrés et convexes [8, p. 81 et 9, p. 5]. Par conséquent, pour tout n , on a aussi :

$$L_n = 1/n \sum_{i=1}^n \xi_i \in \bigcup_{k \geq 1} C_k \quad \text{p. c.}$$

Définissons deux suites d'éléments aléatoires de la façon suivante :

$$\xi_i^k(\omega) = \xi_i(\omega) \text{ si } \xi_i(\omega) \in C_k \text{ et } \xi_j^k(\omega) = 0 \text{ si } \xi_i(\omega) \notin C_k$$

$$R_i^k(\omega) = 0 \quad \text{si} \quad \xi_i(\omega) \in C_k \quad \text{et} \quad R_i^k(\omega) = \xi_i(\omega) \\ \text{si} \quad \xi_i(\omega) \in \complement C_k$$

Désignons $1/n \sum_{i=1}^n \xi_i^k$ et $1/n \sum_{i=1}^n R_i^k$ par z_n^k et t_n^k respectivement. Il est évident que :

$$L_n = z_n^k + t_n^k$$

a) C_k étant compact, $\bigcup_{n \geq 1} \{z_n^k\}$ est donc relativement compact. D'autre part pour un k donné, les ξ_i^k sont de même loi et forment une suite stationnaire. Mais comme $\xi_i^k \in C_k$, $E \xi_i^k$ existe [§ 2, proposition 4] et $\langle x', z_n^k \rangle$ converge p. c., pour tout $x' \in T'$. Il existe donc [proposition 1] un $H^k \in \mathcal{F}$ tel que la suite $z_n^k(\omega)$ soit une suite de Cauchy, $\forall \omega \in H^k$.

b) on a :

$$p(t_n^k) \leq 1/n \sum_{i=1}^n p(R_i^k) \quad \forall p \in (p_l)$$

Mais comme $E p(\xi_i) < \infty$, $E p(R_i^k) < \infty$, et il existe donc une variable aléatoire h_p^k , et un ensemble $H_p^k \in \mathcal{F}$ tel que $P(H_p^k) = 1$, et :

$$1/n \sum_{i=1}^n P(R_i^k(\omega)) \rightarrow h_p^k(\omega) \quad \forall \omega \in H_p^k$$

avec $E(h_p^k) \leq E p(R_i^k)$ [lemme de Fatou]. Mais comme $E p(\xi_i)$ existe, on peut pour toute suite (a_m) de nombres positifs telle que $\sum a_m < \infty$, trouver une suite k_m d'entiers positifs telle que :

$$\int_{\Omega - \xi_i(C_{k_m})} p(\xi_i) dP = \int p(R_i^{k_m}) dP \leq a_m$$

ce qui implique que $h_p^{k_m} \rightarrow 0$ p. c. [théorème de Borel Cantel-

li]. Il existe donc un ensemble $H^p \in \mathcal{F}$ tel que $P(H^p) = 1$, et $h_p^{k_m}(\omega) \rightarrow 0$ pour tout $\omega \in H^p$. Désignons par H l'ensemble :

$$H = H_0 \cap \bigcap_{k \geq 1} H^k \cap \bigcap_{\substack{k \geq 1 \\ i \geq 1}} H_{p_i}^k \cap \bigcap_{i \geq 1} H^{p_i}$$

On a évidemment $H \in \mathcal{F}$ et $P(H) = 1$. Soient $\omega \in H$, $p \in (p_i)$ et ε un nombre positif donné. On a :

$$h_p^{k_m}(\omega) \xrightarrow{m} 0 \quad \text{et} \quad 1/n \sum_{i=1}^n p(R_i^{k_m}(\omega)) \xrightarrow{n} h_p^{k_m}(\omega)$$

on peut trouver donc, un $m_0 > 0$, tel que :

$$h_p^{k_{m_0}}(\omega) \leq \varepsilon/8$$

et un n_0 tel que :

$$\left| 1/n \sum p(R_i^{k_{m_0}}(\omega)) - h_p^{k_{m_0}}(\omega) \right| \leq \varepsilon/8 \quad \forall n \geq n_0$$

ce qui implique :

$$p(t_n^{k_{m_0}}(\omega)) \leq 1/n \sum_{i=1}^n p(R_i^{k_{m_0}}(\omega)) \leq \varepsilon/4 \quad \forall n \geq n_0$$

m_0 étant ainsi choisi, la suite $z_n^{k_{m_0}}(\omega)$ est une suite de Cauchy, et il existe un n_1 tel que :

$$p(z_m^{k_{m_0}}(\omega) - z_n^{k_{m_0}}(\omega)) \leq \varepsilon/2 \quad \forall n, m \geq n_1$$

Revenons maintenant à la suite (L_n) . On a :

$$\begin{aligned} p(L_n(\omega) - L_m(\omega)) &= p(z_n^{k_{m_0}}(\omega) + t_n^{k_{m_0}}(\omega) - z_m^{k_{m_0}}(\omega) - \\ &- t_m^{k_{m_0}}(\omega)) \leq p(z_n^{k_{m_0}}(\omega) - z_m^{k_{m_0}}(\omega)) + p(t_n^{k_{m_0}}(\omega)) + \\ &+ p(t_m^{k_{m_0}}(\omega)) \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon \end{aligned}$$

$\forall n, m \geq \sup(n_0, n_1)$. Ce qui prouve que $(L_n(\omega))$ est une

suite de Cauchy. Ce qui achève la démonstration.

Soit G la limite inductive d'une famille d'espaces de Fréchet. Tout espace de Fréchet étant tonnelé, G est lui-même tonnelé [9, p. 2]. Dans le dual faible de G , toute partie bornée est faiblement relativement compacte [9, p. 65].

Proposition 3 : Soient E le dual d'un espace G qui est la limite inductive d'une famille d'espaces de Fréchet, et qui est séparable, (ξ_n) une suite stationnaire de $\mathcal{C}_G$ -éléments aléatoirement intégrables, et telle que $\bigcup_{n \geq 1} \{L_n\} = \bigcup_{n \geq 1} \{1/n \sum_{i=1}^n \xi_i\}$ soit p. c. $\sigma(E, G)$ -borné. Dans ces conditions L_n converge faiblement p. c. vers un élément aléatoire ξ .

En effet soit (x'_n) une suite dense G . Comme $\bigcup_{n \geq 1} \{L_n\}$ est p. c. borné, il existe un $H \in \mathcal{F}$ tel que $P(H) = 1$, et tel que pour tout $\omega \in H$ il existe un ensemble B_ω qui est $\sigma(E, G)$ -borné contenant $\bigcup_{n=1} \{L_n(\omega)\}$. Ce qui implique que $\bigcup_{n=1} \{L_n\}$ est faiblement relativement compact. D'autre par $\langle x'_i, L_n \rangle$ converge p. c. d'après le théorème de Birkoff, Ce qui achève la démonstration, d'après la proposition 1.

Proposition 4 : Si on suppose en plus, dans la proposition 3, que les ξ_n sont indépendant, alors $E\xi_n$ existe, et $\xi = E\xi_n$ p. c. .

En effet $\langle x', L_n \rangle$ converge pour tout $x' \in G$, vers $E(\langle x', L_n \rangle)$ p. c. d'une part, et vers $\langle x', \xi \rangle$ d'autre part. Ce qui implique que :

$$\xi = E(\xi_n) \text{ p. c.}$$

Ce qui achève la démonstration.

CHAPITRE III

§ 1

PROBABILITES TENDUES

I. — PROBABILITES TENDUES

E. Mourier [25], afin de généraliser le théorème de Bochner concernant les fonctions caractéristiques dans le cas d'un espace de Banach séparable, a introduit la notion d'élément aléatoire proprement dit : Soit ξ un élément aléatoire dans un espace de Banach E , m la mesure sur $\mathcal{C}_{E'}$ déterminée par ξ . S'il existe une suite d'ensembles e_k , $\mathcal{C}_{E'}$ -mesurables bornés, tendant vers E , et telle que $\lim m(e_k) = 1$, alors ξ est appelé élément aléatoire proprement dit.

Nous verrons que tout élément aléatoire dans un espace de Banach séparable est proprement dit. Cependant si E est un espace de Banach non séparable, les boules ne sont pas $\mathcal{C}_{E'}$ -mesurables, et par conséquent les $\mathcal{C}_{E'}$ -éléments aléatoires ne sont pas proprement dit. Ils ne le sont pas à fortiori, dans le cas d'un espace localement convexe, qui ne possède pas un système dénombrable fondamental d'ensembles bornés.

Soient (E, G) un couple d'espaces vectoriels en dualité, et $\mathcal{L}_G$ l'algèbre des ensembles cylindriques (relativement à la dualité entre E et G). Afin de généraliser le théorème de Bochner, plus précisément le problème de prolongement d'une probabi-

lité généralisée [définition 1] sur $\mathcal{L}_G$ en une probabilité sur $\mathcal{C}_G$, nous introduisant la notion de probabilité généralisée fortement tendue, faiblement tendue, et tendue. Ces notions sont inspirées des travaux de Le cam [13], Prohorov [32], et Gettoor [19].

Désignons par $\mathcal{L}_{A'}$ la sous-algèbre de $\mathcal{L}_G$ définie par la partie finie A' de G . C'est-à-dire :

$$\mathcal{L}_{A'} = \bar{X}_{A'}^{-1}(\mathcal{B}^{A'})$$

Définition 1 : Soit m une fonction d'ensemble sur $\mathcal{L}_G$ dont la restriction à tout $\mathcal{L}_{A'}$ est une probabilité. Nous dirons que m est une probabilité généralisée.

Définition 2 : Soient (E, G) un couple d'espaces vectoriels en dualité et m une probabilité généralisée définie sur $\mathcal{L}_G$

1) Nous dirons que m est une probabilité généralisée fortement tendue, si pour tous $\alpha : 0 < \alpha < 1$, il existe une partie donnée B_α qui peut dépendre de α , telle que pour toute partie finie de G on a :

$$(1) \quad m \left[\bar{X}_{A'}^{-1}(\overline{\bar{X}_{A'}(B_\alpha)}) \right] \geq \alpha$$

2) Nous dirons que m est une probabilité généralisée tendue si pour tout $\alpha : 0 < \alpha < 1$, et quelle que soit la suite $S' = (x'_n)$ d'éléments de G , il existe une partie B_α, S' , qui peut dépendre de α et de S' , telle que :

$$(2) \quad m \left[\bar{X}_n^{-1}(\overline{\bar{X}_n(B_{\alpha, S'})}) \right] \geq \alpha \quad \forall n$$

3) Nous dirons que m est faiblement tendue, si pour tout $\alpha : 0 < \alpha < 1$, et quelle que soit la partie finie A' de G , il existe une partie bornée $B_{\alpha, A'}$ qui peut dépendre de α et de A' , telle que :

$$(3) \quad m \left[\bar{X}_{A'}^{-1} (\overline{X_{A'}(B_{\alpha, A'})}) \right] \geq \alpha$$

Si m est une probabilité sur $\mathcal{C}_G$, elle détermine la loi d'un $\mathcal{C}_G$ -élément aléatoire. Nous dirons que cet élément aléatoire est fortement tendu, tendu ou faiblement tendue, suivant que la restriction de m à $\mathcal{L}_G$ vérifie (1), (2) ou (3) respectivement.

Proposition 1 : Soient (E, G) un couple d'espaces vectoriels en dualité, m une probabilité généralisée sur $\mathcal{L}_G$, alors m est faiblement tendue.

En effet soient A' , une partie libre finie de G , A° le sous-espace de E orthogonal à A' , et $E_{A'}$ un supplément algébrique de A° dans E . $E_{A'}$ est de dimension finie [7, p. 48]. Comme par hypothèse, l'image de m par $X_{A'}$ dans $R^{A'}$ est une mesure de probabilité, il existe pour tout $\alpha : 0 < \alpha < 1$ une partie mesurable bornée K_α dans $R^{A'}$ telle que :

$$m \left[\bar{X}_{A'}^{-1} (K_\alpha) \right] \geq \alpha$$

Soit $B_\alpha = E_{A'} \cap \bar{X}_{A'}^{-1} (K_\alpha)$. Il est évident que B_α est bornée dans $E_{A'}$ ($X_{A'}$ est une isomorphisme de $E_{A'}$ sur $R^{A'}$) et par conséquent dans E muni de la topologie faible, et on a :

$$m \left[\bar{X}_{A'}^{-1} (X_{A'}(B_\alpha)) \right] = m \left[\bar{X}_{A'}^{-1} (K_\alpha) \right]$$

Ce qui achève la démonstration.

Proposition 2 : Soient (E, G) un couple d'espaces vectoriels en dualité, m une probabilité sur $\mathcal{C}_G$, et m^* la mesure extérieure induite par m sur l'ensemble des parties de E . S'il existe une suite (B_n) de parties de E bornées (pour les topologies compatibles avec la dualité entre E et G) telle que :

$$(4) \quad m^*(\cup B_n) = 1$$

alors m est fortement tendue.

Si $B_n \in \mathcal{C}_G$ pour tout n , la condition (4) devient $m(\cup B_n) = 1$, et la proposition devient évidente. Supposons que les B_n n'appartiennent pas toutes à $\mathcal{C}_G$, et qu'elles forment une suite croissante (ce qui ne restreint pas d'ailleurs la généralité), B_n tend alors vers $\cup B_n$, et :

$$(5) \quad m^*(B_n) \rightarrow m^*(\cup B_n) = 1$$

[20, p. 53]. Soit maintenant $\alpha : 0 < \alpha < 1$. Il existe d'après (5) un n_α tel que $m^*(B_n) \geq \alpha$ pour tout $n \geq n_\alpha$. Ce qui implique :

$$m \left[\bar{X}'_{A'}(X'_{A'}(B_{n_\alpha})) \right] \geq m^*(B_{n_\alpha}) \geq \alpha$$

quelle que soit la partie finie A' de G . Ce qui achève la démonstration.

Exemples. — 1) E est un espace normé. On peut prendre pour la suite (B_n) , une suite croissante de boules de centre 0 dont la réunion est égale à E .

2) Soit E un espace vectoriel topologique, limite inductive stricte d'une suite croissante d'espaces de Banach E_n . Comme il existe un système fondamental dénombrable d'ensembles bornés pour tout E_n , il existe pour E lui-même un système fondamental dénombrable d'ensemble bornés [9, p. 12].

3) E est un espace de Fréchet séparable. Si $\mathfrak{C}$ désigne la topologie de E , on a $\mathcal{C}_{E'} = \hat{\mathcal{B}}_{\mathfrak{C}}$ [chp. I], d'autre part toute mesure bornée positive sur $\mathcal{C}_{E'}$ est portée par la réunion d'une suite de parties compactes [20, p. 40].

4) E est le dual d'un espace localement convexe métrisable G . Si la suite décroissante (U_n) forme un système fondamental

de voisinages de 0 dans G , la suite des polaires (U_n^0) dans E forme une suite d'ensembles bornés dont la réunion est E .

Remarque : Dans les quatre exemples ci-dessus, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) m est une probabilité sur $\mathcal{C}_G$ ($\mathcal{C}_{G'}$) fortement tendue.
- b) m est tendue.
- c) m est faiblement tendue.

Nous allons démontrer maintenant quelques propositions concernant le prolongement d'une probabilité généralisée.

Proposition 3 : Soient (E, G) un couple d'espaces vectoriels en dualité, m une probabilité généralisée sur $\mathcal{L}_G$. S'il existe dans E un système fondamental d'ensembles bornés qui sont $\sigma(E, G)$ -compacts, alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) m est complètement additive (donc prolongeable d'une seule manière en une probabilité sur $\mathcal{C}_G$).
- b) m est fortement tendue.
- c) m est tendue.

En effet d'après la proposition 1. on a : a) $\Rightarrow$ b), et évidemment b) $\Rightarrow$ c). Démontrons que c) $\Rightarrow$ a). Soit (C_n) une suite décroissante d'ensembles cylindriques telle que :

$$m(C_n) \rightarrow a > 0$$

Nous allons démontrer que $\cap C_n \neq \emptyset$

On ne restreint pas la généralité si on suppose qu'il existe une suite (x'_n) d'éléments de G , formant un système linéairement indépendant et telle que :

$$C_n = \bar{X}'_n(K_n)$$

où X'_n désigne l'application $(x'_1, \dots, x'_n)$ et K_n un ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$. m étant tendue, à $\alpha : 1 - a < \alpha < 1$ et (x'_n) , cor-

respond une partie B de $E \sigma(E, G)$ -compacte telle que :

$$m \left[\bar{X}'_n(X'_n(B)) \right] \geq \alpha \quad \forall n$$

Comme $m(C_n) \geq \alpha$, quel que soit n , on obtient successivement :

$$C_n \cap \bar{X}'_n(X'_n(B)) \neq \emptyset$$

$$\emptyset \neq X'_n \left[C_n \cap \bar{X}'_n(X'_n(B)) \right] \subset X'_n(C_n) \cap X'_n(B)$$

L'image réciproque de $X'_n(C_n)$ par X'_n , étant l'ensemble cylindrique C_n lui-même, on en conclut que :

$$C_n \cap B \neq \emptyset \quad \forall n$$

B étant $\sigma(E, G)$ -compacte, et les C_n faiblement fermées (comme images réciproques des fermés K_n par les applications $\sigma(E, G)$ -continues (X'_n) , on en conclut que :

$$(\cap C_n) \cap B \neq \emptyset$$

Ce qui achève la démonstration.

Exemples. — 1) E est un espace de Banach réflexif (comparer avec [19] et [25])

2) E est le dual d'un espace localement convexe métrisable G muni de la topologie $\sigma(E, G)$.

3) E est un espace vectoriel topologique limite inductive stricte d'une suite croissante d'espaces de Banach réflexifs E_n .

En effet, E est réflexif et admet un système dénombrable fondamental d'ensembles bornés (donc $\sigma(E, E')$ -compacts).

Proposition 4 : Soient E un espace localement convexe semi-réflexif, et m une probabilité généralisée sur $\mathcal{L}_{E'}$. Une condition suffisante pour que m soit prolongeable, d'une seule manière,

en une probabilité sur $C_{E'}$, est que m soit tendue.

En effet, soit C_n une suite décroissante d'ensembles cylindriques telle que :

$$m(C_n) \rightarrow a \neq 0$$

Nous allons démontrer que $\cap C_n \neq \emptyset$. Comme pour la proposition 3, on peut considérer, sans restreindre la généralité, qu'il existe une suite (x'_n) d'éléments de G formant un système linéairement indépendant et telle que :

$$C = \bigcap_n \bar{X}'_n(K_n)$$

où X'_n désigne l'application $(x'_1, \dots, x'_n)$, et K_n un ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$. m étant tendue, à $\alpha : 1 - a < \alpha < 1$ et à (x'_n) , correspond une partie B de E bornée et $\sigma(E, E')$ -compact (E est semi-réflexif) telle que :

$$m \left[\bigcap_n \bar{X}'_n(X'_n(B)) \right] \geq \alpha \quad \forall n$$

En procédant comme pour la proposition 3, on obtient :

$$\cap C_n \neq \emptyset$$

Nous allons généraliser la proposition 3 dans le cas d'un espace de Frechet réflexif.

Soient E un espace de Fréchet, E' son dual fort, H un sous-espace fermé de E' engendré par une suite d'éléments de E' , et H° le sous-espace de E orthogonal à H . Les espace E/H° et H sont mis en dualité par la forme bilinéaire canonique :

$$\langle x', \dot{x} \rangle = \langle x', x \rangle \quad \text{avec } x' \in H, \quad \dot{x} \in E/H^\circ, \quad \text{et } x \in \dot{x}$$

Désignons par φ l'application canonique de E sur E/H° , et

considérons la σ -algèbre $\mathcal{C}_H$ engendrée par les sous-ensembles de E/H^0 , qui sont de la forme :

$$\{\dot{x} : \langle x', \dot{x} \rangle < \alpha\} \quad , \quad x' \in H \quad , \quad \dot{x} \in E/H^0 \quad , \quad \text{et} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

φ est $\mathcal{C}_{E'}$ - $\mathcal{C}_H$ -mesurable. En effet :

$$\varphi^{-1}\{\dot{x} : \langle x', \dot{x} \rangle < \alpha\} = \{x : \langle x', x \rangle < \alpha\} \in \mathcal{C}_{E'}$$

Dans la suite nous considérerons E/H^0 , comme muni de la topologie quotient par H^0 de la topologie initiale de E . Cette topologie est rappelons le, compatible avec la dualité entre E'/H^0 et H . Ajoutons que si E est réflexif, et si H est séparable, E/H est un espace de Fréchet réflexif et séparable.

Proposition 5 : Soient E un espace de Fréchet réflexif, E' son dual, et m une probabilité généralisée sur $\mathcal{L}_{E'}$. Une condition nécessaire et suffisante pour que m puisse être prolongée sur $\mathcal{C}_{E'}$ est quelle soit tendue.

La condition est suffisante d'après la proposition 4.

La condition est nécessaire : En effet, soit S' une suite d'éléments de E' . Désignons par H le sous-espace fermé engendré par S' , et par H^0 le sous-espace de E orthogonal à H . Nous avons vu que l'application $\varphi : E \rightarrow E/H^0$ est $\mathcal{C}_{E'}$ - $\mathcal{C}_H$ -mesurable. Désignons par μ la mesure $m\varphi^{-1}$ sur $\mathcal{C}_H$. E/H^0 étant un espace de Fréchet séparable, la mesure μ est donc portée par la réunion dénombrable d'une suite d'ensembles compacts et $\mathcal{C}_H$ -mesurables. Par conséquent, pour tout $\alpha > 0$, il existe un ensemble compact K dans E/H^0 tel que pour toute partie finie A' de H on ait :

$$(1) \quad \mu \left[\bar{X}'_{A'}(X'_{A'}(K)) \right] \geq 1 - \alpha$$

E/H^0 étant complet, on peut sans restreindre la généralité, sup-

poser K convexe et équilibré. H étant d'autre part séparable, il est réflexif. On sait aussi que $\tau(H, E/H^0)$ est plus fine que la topologie de H (comme sous-espace de E) [9, exerc. 5-b, p.79], mais H étant réflexif, ces deux topologies sont identiques [9, p. 70]. K est donc l'image per φ d'un ensemble convexe équilibré $\sigma(E, E')$ -compact C dans E [9, p. 79, exerc. 5-b]. On a alors :

$$\bar{X}'_{A'}(X'_{A'}(C)) \supset \bar{\varphi}^{-1}(\bar{X}'_{A'}(X'_{A'}(K)))$$

d'où :

$$m \left[\bar{X}'_{A'}(X'_{A'}(C)) \right] \geq m \bar{\varphi}^{-1} \left[\bar{X}'_{A'}(X'_{A'}(K)) \right] = \\ \mu \left[\bar{X}'_{A'}(X'_{A'}(K)) \right] \geq 1 - \alpha$$

pour toute partie finie d'éléments de S' . Ce qui achève la démonstration.

Proposition 6 : Soit E le dual algébrique d'un espace vectoriel G , muni de la topologie $\sigma(E, G)$, alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) m est une probabilité généralisée sur $\mathcal{L}_G$.
- b) m est complètement additive.
- c) m est tendue.

En effet E muni de la topologie $\sigma(E, G)$ est isomorphe à un espace produit R^I [9, p. 60], et on peut identifier G à la somme directe algébrique $R^{(I)}$. D'après le théorème de Kolmogorof, toute probabilité généralisée sur l'algèbre des ensembles cylindriques d'un espace produit est complètement additive, donc a) $\Rightarrow$ b). D'autre part, tout ensemble borné dans R^I est relati-

vement compact . Donc si m est tendue, on peut démontrer que $c) \Rightarrow b)$, en précédant comme on a procédé pour la démonstration des propositions 3 et 4. Reste à démontrer que $b) \Rightarrow c)$.

Soit (x'_i) une suite dénombrable dans G . On peut supposer sans restreindre la généralité, que les x'_i sont des applications projections, c'est-à-dire que $\langle x'_i, x \rangle = pr_i(x)$ sur un facteur R_i . Désignons par N l'ensemble des entiers positifs, et identifions R^1 à $R^N \times R^{I-N}$. Il est évident que pour tout α : $0 < \alpha < 1$, il existe un compact $K_\alpha \subset R^N$ tel que :

$$m(K_\alpha \times R^{I-N}) \geq \alpha$$

Soit $B = K_\alpha \times (a_i)_{i \in I-N}$, où $(a_i)_{i \in I-N}$ est un élément quelconque de R^{I-N} , on vérifie facilement que :

$$\bar{X}'_n(X'_n(B)) \supset K_\alpha \times R^{I-N} \quad \forall n$$

et par conséquent :

$$m[\bar{X}'_n(X'_n(B))] \geq \alpha \quad \forall n$$

Ce qui achève la démonstration.

Soient (E, G) un couple d'espaces vectoriels et m une probabilité généralisée sur $\mathcal{L}_G$. Soit $x'_1, \dots, x'_n$, n éléments quelconques de G . Désignons par m^n l'image de m dans R^n par l'application $X'_n = (x'_1, \dots, x'_n)$.

Définition 3 : Soit (m_k) une suite de probabilités généralisées sur $\mathcal{L}_G$ nous dirons que les m_k sont uniformément tendues, si pour tout t : $0 < t < 1$ et toute suite (x'_n) d'éléments de G , il existe un ensemble borné B (pour les topologies compatibles avec la dualité entre E et G) tel que l'on ait pour tout k et n :

$$(1) \quad m_n^n(X'_n(B)) \geq 1-t$$

Definition 4 : Nous dirons que m_k converge faiblement vers la probabilité généralisée m , si pour tout n les mesures m_k^n convergent faiblement vers m .

Proposition 7 : Si E est semi-réflexif avec $G = E'$, et si les m_k sont uniformément tendues et convergent faiblement vers m , alors m est tendue (donc prolongeable en une probabilité sur $\mathcal{C}_{E'}$).

En effet, soit (x'_n) une suite quelconque d'éléments de G . Pour tout $t : 0 < t < 1$, il existe par hypothèse une partie bornée qui vérifie (1) de la définition 3. Mais comme m_k converge faiblement vers m , on a pour tout n :

$$1-t \leq m_k^n(X'_n(B)) \xrightarrow{k} m_n^n(X'_n(B))$$

Ce qui achève la démonstration.

Remarques. — 1) Dans les exemples 1, 2, de la proposition 3, si m est tendue, alors m est prolongeable d'une seule manière sur $\mathcal{B}_C$ (la σ -algèbre des ensembles de Baire relativement à la topologie de la convergence uniforme dans les parties compactes dans G pour sa topologie initiale [chp. I, § 1, 3, proposition 3]).

2) Soient E, G deux espaces vectoriels en dualité, m une probabilité généralisée. $\langle x', x \rangle$ peut être considérée comme une variable aléatoire qui suit la loi $x'(m)$ (image de m dans R par l'application x'). S'il existe un élément x dans E tel que :

$$\langle x', x \rangle = \int t d(x'(m)) \quad t \in R$$

on peut penser à appeler $\mathbf{x}$ espérance mathématique généralisée. La proposition 3 du chp. I, § 2 sur l'existence de l'espérance mathématique reste valable dans ce cas.

3) Soit E un espace localement convexe, et soit m une probabilité généralisée sur $\mathcal{L}_{E'}$. Supposons qu'à chaque $a : 0 < a < 1$ correspond une partie compacte K de E , telle que :

$$m \left[\bar{X}_{A'}^{-1} (X'_{A'}(K)) \right] \geq a$$

pour toute partie finie dans E' . m est évidemment fortement tendue, mais elle est tendue aux sens de le Cam-Prohorov [13, 32] .

§ 2

CARACTÉRISTIQUE D'UN ÉLÉMENT ALÉATOIRE DANS UN ESPACE VECTORIEL

La caractéristique d'un élément aléatoire dans un espace vectoriel localement convexe a été introduite pour la première fois par A. N. Kolmogorof [23] dans le cas d'un espace de Banach. Parmi les travaux concernant ce sujet, signalons en premier lieu les travaux de Mourier [25, 26, 27] de Fortet [14], ainsi que les travaux de Le Cam [13], et Prohorov [32].

Definition 1 : Soient G un espace vectoriel localement convexe, $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$. Nous dirons que φ est définie positive si quels que soient la suite finie $(x'_1, \dots, x'_n)$ d'éléments de G et les nombres complexes $t_1, \dots, t_n$, on a :

$$\sum_{j,k} \varphi(x_j - x_k) t_j \bar{t}_k \geq 0$$

Definition 2 : Soient E un espace localement convexe, E' son dual topologique et $\xi : \Omega \rightarrow E$ un $\mathcal{C}'_{E'}$ -élément aléatoire. L'application $\varphi : E' \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$\varphi(x') = E e^{i \langle x', \xi \rangle}$$

est par définition la caractéristique de l'élément aléatoire.

Il est évident que $\varphi(x')$ est une fonction définie positive telle que $\varphi(0) = 1$. Elle est continue dans tout sous-espace de dimension finie de E (muni de l'unique topologie compatible

avec sa structure d'espace vectoriel), et elle détermine la loi de ξ sur $\mathcal{C}_{E'}$ [25].

Réciproquement, soit $\varphi: E' \rightarrow C$ une application de E' dans C , qui possède les propriétés suivantes :

- a) $\varphi(0) = 1$
- b) $\varphi(x')$ est définie positive.
- c) $\varphi(x')$ est continue dans tout sous-espace de E' , de dimension finie.

Si $(x'_1, \dots, x'_n)$ est une suite finie libre d'éléments de E' , il est évident d'après les hypothèses faites sur φ , que la fonction :

$$\Psi(u_1, \dots, u_n) = \varphi(u_1 x'_1 + \dots + u_n x'_n)$$

est une fonction caractéristique d'un élémentaire dans R^n . (d'après le théorème classique de Bochner).

Soit $F_n(x'_1, t_1; \dots; x'_n, t_n)$ la fonction de répartition déterminée par Ψ . Il est facile de vérifier que les F_n vérifient les conditions habituelles de consistance :

- 1) Les F_n sont des fonctions symétriques en (x'_i, t_i) .
- 2) $F_{n+1}(x'_1, t_1; \dots; x'_n, t_n; x'_{n+1}, \infty) = F_n(x'_1, t_1; \dots; x'_n, t_n)$

Soit m^n la mesure de probabilité déterminée par :

$$F_n(x'_1, t_1; \dots; x'_n, t_n)$$

sur $\mathcal{B}^n$ (σ -algèbre des ensembles boréliens de R^n), et soit m la fonction d'ensemble définie sur $\mathcal{L}_{E'}$ de la manière suivante :

Si D est un ensemble cylindrique défini par $(x'_1, \dots, x'_n)$, et l'ensemble $D' \in \mathcal{B}^n$, c'est-à-dire si :

$$D = \bar{X}'_n(D')$$

on pose :

$$m(D) = m^n(D')$$

On peut vérifier facilement que :

$$1) m(E) = 1$$

$$2) m(D) \geq 0$$

3) Pour toute partie finie A' dans G , la restriction de m à $\mathcal{L}_{A'}$, est une probabilité. Ce qui implique que m est additive sur $\mathcal{L}_{E'}$, et qu'elle est par conséquent, une probabilité généralisée.

Dans quelles conditions, m est prolongeable en une probabilité sur $\mathcal{C}_{E'}$? E. Mourier a démontré le théorème suivant :

Theoreme (Mourier) : Soient E un espace de Banach séparable et réflexif, $\varphi(x')$ une application de E' dans le corps des complexes qui est définie positive, continue dans E et telle que $\varphi(0) = 1$, alors φ est une caractéristique d'un élément aléatoire dans E , si et seulement si, elle satisfait à une certaine condition C [25].

Si m désigne la probabilité généralisée déterminée par φ , la condition C est équivalente à dire que m est fortement tendue.

Gettoor [19] a repris le problème, dans le cas d'un espace de Banach réflexif, mais non nécessairement séparable. la famille des distributions F_n déterminées par $\varphi(x')$ détermine un processus stochastique. Gettoor démontre que ce processus admet en général une représentation dans le dual algébrique de E' . E étant un sous-espace de E'^* , Gettoor donne une condition nécessaire et suffisante pour que ce processus admette une représentation dans E lui-même.

Theoreme (Getoor) : Soit E un espace de Banach réflexif, et $\varphi(x')$ une fonction définie positive sur E' . Une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit la caractéristique d'un $\mathcal{C}_{E'}$ -élément aléatoire, est que :

1) φ soit continue sur tout sous-espace de dimension finie de E' .

2) Pour tout sous-espace séparable E'_1 de E' et pour tout $a, b > 0$, il existe $q(E'_1, a, b)$ tel que l'on ait, pour toute partie finie $(x'_1, \dots, x'_n)$ dans E'_1 avec $\|x'_i\| \leq q$:

$$\int_{-b}^b \dots \int_{-b}^b dF_n(x'_1, t_1; \dots; x'_n, t_n) \geq a$$

Bodrikian [4] a traité le même problème que Getoor, en utilisant une méthode différente, et modifie apparemment la condition C. En effet la condition C, et celle de Badrikian sont, l'une comme l'autre, équivalentes à dire que la probabilité généralisée déterminée par φ est fortement tendue.

En appliquant la proposition 3 de § 1, on obtient les trois propositions suivantes.

Proposition 1 : Soient E un espace de Banach réflexif, $\varphi : E' \rightarrow C$ une fonction définie positive et continue dans tout sous-espace de dimension finie de E' , et telle que $\varphi(0) = 1$. Soit m la probabilité généralisée déterminée par φ sur l'algèbre des ensembles cylindriques $\mathcal{L}_{E'}$. Une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit la caractéristique d'un $\mathcal{C}_{E'}$ -élément aléatoire est que m soit tendue.

Proposition 3 : Soient E le dual d'un espace métrisable G , $\varphi : G \rightarrow C$ une fonction définie positive continue dans tout sous-espace de dimension finie de G , et telle que $\varphi(0) = 1$. Soit m la probabilité généralisée déterminée par φ sur l'algèbre

des ensembles cylindriques $\mathcal{L}_G$. Une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit la caractéristique d'un $\mathcal{C}_G$ -élément aléatoire est que m soit tendue.

Proposition 3 : Soient E un espace vectoriel topologique limite inductive stricte d'une suite croissante d'espaces de Banach réflexifs (E_n) , $\varphi : E' \rightarrow C$ une fonction définie positive continue dans tous sous-espace de dimension finie de E' , et telle que $\varphi(0) = 1$. Soit m la probabilité généralisée déterminée par φ sur l'algèbre des ensembles cylindriques $\mathcal{L}_{E'}$. Une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit la caractéristique d'un $\mathcal{C}_{E'}$ -élément aléatoire, est que m soit tendue.

Par application de la proposition 4 de § 1, on obtient la proposition suivante :

Proposition 4 : Soient E un espace localement convexe et semi-réflexif, $\varphi : E' \rightarrow C$ une fonction définie positive, et continue dans tout sous-espace de dimension finie de E' , et telle que $\varphi(0) = 1$. Soit m la probabilité généralisée déterminée par φ sur l'algèbre des ensembles cylindriques $\mathcal{L}_{E'}$. Une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit la caractéristique d'un $\mathcal{C}_{E'}$ -élément aléatoire, est que m soit tendue.

Par application de la proposition 5 de § 1, on obtient la proposition :

Proposition 5 : Soient E un espace de Fréchet réflexif, et $\varphi : E' \rightarrow C$ une fonction définie positive, qui est continue dans tout sous-espace de dimension finie de E' , et telle que $\varphi(0) = 1$. Soit m la probabilité généralisée déterminée par φ sur l'algèbre $\mathcal{L}_{E'}$. Une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit la caractéristique d'un $\mathcal{C}_{E'}$ -élément aléatoire, est que m soit tendue.

Par application de la proposition 6 de § 1, on obtient la proposition :

Proposition 6 : Soit E le dual algébrique d'un espace vectoriel G . Considérons la dualité entre E et G . Si $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$ est une application définie positive, continue sur tout sous-espace de dimension finie de G , et telle que $\varphi(0) = 1$, alors φ est la caractéristique d'un $\mathcal{C}_G$ -élément aléatoire.

Exemple : soit E le dual algébrique $\mathcal{D}^*$ de l'espace $\mathcal{D}$ des fonctions infiniment dérivables, et à support compact. Considérons la dualité entre $\mathcal{D}^*$ et $\mathcal{D}$. Alors toute fonction $\varphi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ qui est définie positive, et continue sur tout sous-espace de dimension finie de G , et telle que $\varphi(0) = 1$, est la caractéristique d'un $\mathcal{C}_\sigma$ -élément aléatoire [18].

Remarque : La proposition 6 montre que le processus stochastique déterminé par une $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$ qui est définie positive, continue sur tout sous-espace de dimension finie de G , et telle que $\varphi(0) = 1$, admet une représentation dans le dual algébrique de G .

L'image d'un sous-ensemble d'un espace vectoriel, par une application de la forme X'_A , est souvent incommode. Cependant dans le cas d'un espace de Hilbert séparable, les méthodes de ce chapitre sont facilement applicables. A titre d'exemple, nous allons démontrer un théorème démontré déjà par Sazanov [34], en appliquant la proposition 2.

Proposition 7 : Soient E un espace de Hilbert séparable, (x_i) une base orthonormée dans E . Une condition nécessaire et suffisante pour que $\varphi : E \rightarrow \mathbb{C}$ soit la caractéristique d'un $\mathcal{C}_E$ -élément aléatoire ξ , tel que $E \|\xi\|^2 < \infty$, est que φ soit :

a) définie positive, et $\varphi(0) = 1$.

b) continue pour la topologie de E .

c) $\sum a_n^2 < \infty$ avec $a_n = \int \alpha^2 dF_n(\alpha)$.

où $F_n(\alpha)$ est la fonction de répartition déterminée par $\varphi(u x_n)$.

Les conditions sont évidemment nécessaires.

Les conditions sont suffisantes: Soient m la probabilité généralisée déterminée par $\Psi(u_1, \dots, u_n) = \varphi(u_1 x_1 + \dots + u_n x_n)$. Soit $\alpha: 0 < \alpha < 1$, et soit b un nombre déterminé par $\alpha > 1/b$.

Si B désigne la boule dans E de centre 0 , et de rayon :

$r = \sqrt{b \sum a_i^2}$. On obtient successivement :

$$X'_n(B) = \left\{ t : t = (t_1, \dots, t_n) \in R^n, \sum_{i=1}^n t_i^2 \leq r^2 \right\}$$

$$m^n X'_n(B) = m^n \left\{ \sum_{i=1}^n t_i^2 \leq r^2 \right\} \geq 1 - \frac{\sum a_i^2}{b \sum a_i^2} = 1 - 1/b > 1 - \alpha$$

Ce qui implique que m est fortement tendue, d'où notre assertion.

Le Cam a démontré une proposition qui peut être utilisée pour prouver qu'une fonction φ est la caractéristique d'un élément aléatoire tendu au sens de Le cam [§ 1, remarque 3].

Nous allons démontré une proposition semblable, qui peut être utilisée pour prouver qu'une fonction φ est la caractéristique d'un élément aléatoire au sens de § 1, définition 2. La démonstration s'effectue en modifiant légèrement la démonstration du théorème de Le Cam donné dans [32].

Définition 3 : Soient (E, G) un couple d'espaces vectoriels en dualité, A' une partie de G . Toute expression de la forme :

$$q(x) = \sum_{k=1}^n c_k e^{i \langle x'_k, x \rangle}$$

où c_k est un nombre complexe quelconque, $x'_k \in A'$, et $x \in E$,

est par définition un A' -polynôme trigonométrique.

Proposition 8 : Soient E un espace localement convexe semi-réflexif, E' son dual, et $\varphi : E' \rightarrow \mathbb{C}$ une application continue dans tout sous-espace de dimension finie de E' , et telle que $\varphi(0) = 1$. Une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit la caractéristique d'un élément aléatoire tendu est que :

Pour toute suite S' d'éléments de E' , et tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie B dans E , bornée $\sigma(E, E')$ -fermée (donc $\sigma(E, E')$ -compacte) et un nombre $\delta > 0$, tels que les inégalités :

$$(1) \quad \sup_{x \in E} |q(x)| \leq 1$$

$$\sup_{x \in B} |q(x)| < \delta$$

$$\text{implique} \quad \left| \sum c_k \varphi(x'_k) \right| < \varepsilon$$

pour tout S' -polynôme trigonométrique.

Les conditions sont nécessaires : Si φ est la caractéristique d'un élément aléatoire tendu, alors $\forall S' \subset E'$, et $\forall \varepsilon : 0 < \varepsilon < 1$, il existe une partie bornée (donc $\sigma(E, E')$ -compacte) B , telle que :

$$m \left[\bar{X}'_n(X'_n(B)) \right] \geq 1 - \varepsilon/2 \quad \forall n$$

où X'_n est l'application définie par les n premiers éléments de S' , et m la probabilité déterminée par φ sur $\mathbb{C}_{E'}$. Soient $\delta = \varepsilon/2$, et $q(x)$ un S' -polynôme trigonométrique déterminé par les n premiers éléments de S' — ce qui ne restreint par la généralité — et désignons par $\tilde{B}$ l'ensemble cylindrique :

$$\bar{X}'_n(X'_n(B))$$

Si $q(x)$ satisfait aux conditions (1) et (2) de la proposition,

pour B et $\delta = \varepsilon/2$, on obtient :

$$|\sum c_k \varphi(x'_k)| \leq \int_{\widetilde{B}} |q(x)| dm + \int_{E-\widetilde{B}} |q(x)| dm$$

mais :

$$\sup_{x \in \widetilde{B}} |q(x)| = \sup_{x \in B} |q(x)| < \varepsilon/2$$

et :

$$\int_{E-\widetilde{B}} |q(x)| dm \leq \int_{E-\widetilde{B}} dm < \delta = \varepsilon/2$$

Ce qui implique que :

$$|\sum c_k \varphi(x'_k)| < \varepsilon$$

Les conditions sont suffisantes : La démonstration s'appuie sur le lemme suivant :

Lemme de Prohorov : [32] Soit Q une mesure de probabilité sur R^n . Si le compact K est tel que pour tout polynôme trigonométrique :

$$q(a) = \sum_{k=1}^n c_k e^{i(t_k, a_k)} \quad (t_k), (a_k) \in R^n$$

les inégalités :

$$\sup_{a \in R^n} |q(a)| \leq 1$$

$$\sup_{a \in K} |q(a)| \leq \delta$$

impliquent l'inégalité :

$$|\int q(a) dQ| < \varepsilon$$

alors :

$$Q(K) > 1 - \varepsilon$$

Démonstration : Soient S' une suite d'éléments de E' , et ε : $0 < \varepsilon < 1$, et soit B et δ , la partie bornée de E' et le nombre positif correspondant à S' et ε , et pour lesquels les conditions de la proposition sont vérifiées. Désignons par m^n l'image de la probabilité généralisée m déterminée par γ sur $\mathcal{L}_{E'}$, par l'application X'_n déterminée par les n premiers éléments de S' . Les conditions de la proposition, impliquent que tout polynôme trigonométrique dans R^n vérifie les conditions du lemme de Prohorov, pour $Q = m^n$ et $K = X'_n(B)$, ce qui implique :

$$m^n(X'_n(B)) \geq 1 - \varepsilon$$

mais :

$$1 - \varepsilon \leq m^n(X'_n(B)) = m[\bar{X}_n^{-1}(X'_n(B))]$$

donc m est tendue. Ce qui achève la démonstration.

Aux propositions 1, 2, 3, 5, 6 correspondent des propositions analogues à la proposition S, et dont la démonstration s'effectue comme ci-dessus avec de légères modifications.

Nous allons démontrer une autre proposition qui permet dans plusieurs cas, de reconnaître si une application $\varphi(x')$ est une caractéristique.

Soient E un espace vectoriel localement convexe, et E' son dual d'une topologie $\mathcal{G}$ compatible avec la dualité entre E' et E . Soit $\|x\|_{V'} = \sup_{x' \in V'} |\langle x', x \rangle|$, où V' est un voisinage de 0 pour $\mathcal{G}$.

Proposition 9 : Soient E un espace réflexif, $(\varphi_n(x'))$ une suite de caractéristiques, m_n la mesure de probabilité déterminée par $\varphi_n(x')$ sur $\mathcal{L}_{E'}$. S'il existe un V' , un $a > 0$, et $s > 0$, tels que l'on ait pour tout n :

$$\int \|x\|_{V'}^a dm_n = s_n^a < s^a$$

et si $\varphi_n(x')$ converge vers $\varphi(x')$, et φ_n converge vers φ uniformément dans un voisinage de 0 dans E'_n , quel que soit le sous-espace de dimension finie E'_n de E' , alors φ est une caractéristique.

En effet dans ces conditions, φ est définie positive, $\varphi(0) = 1$. D'autre part $\Psi_n(u_1, \dots, u_n) = \varphi_n(u_1 x'_1 + \dots + u_n x'_n)$ converge vers $\Psi(u_1, \dots, u_n) = \varphi(u_1 x'_1 + \dots + u_n x'_n)$, uniformément dans un voisinage de 0 dans R^n . Si on désigne par X_k^n l'élément aléatoire dans R^n que détermine φ_k , X_k^n converge en loi vers X^n . Ce qui implique que φ est continue dans tout sous-espace à dimension finie de E' . Soit m la probabilité généralisée déterminée par φ sur l'algèbre $\mathcal{L}_{E'}$ des ensembles cylindriques de E . Désignons par B_r le sous-ensemble de E déterminé par $\|x\|_{E'} \leq r$. B_r est borné, $\sigma(E, G)$ -fermé donc $\sigma(E, G)$ -compact, et $\mathcal{C}_{E'}$ -mesurable. On a donc

$$(1) \quad m_n(B_r) \geq 1 - s^a / r^a$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$ donné, et choisissons r de manière que $s^a / r^a \leq \varepsilon$. Il est évident d'après (1) que pour $X'_j = (x'_1, \dots, x'_j) \in G$ quelconque, on a :

$$m \left[\bar{X}_j^{-1} (X'_j(B_r)) \right] \geq \lim_n m_n(B_r) \geq 1 - \varepsilon$$

Ce qui prouve que m est fortement tendue. Ce qui achève la démonstration.

Remarques : 1) Cette proposition est particulièrement applicable dans le cas d'un espace de Banach.

2) Si E , au lieu d'être un espace réflexif, est le dual d'un espace tonnelé, la proposition 9 reste valable. Elle est particulièrement applicable dans le cas où E est le dual d'un espace de Fréchet.

3) Soient E un espace réflexif non séparable, E' son dual fort, H un sous-espace séparable fermé de E' , et E/H° le quotient de E par H° (sous-espace de E orthogonal à H). Désignons par $\mathcal{L}_H$ l'algèbre des ensembles cylindriques de E/H° , et par $\mathcal{C}_H$ la σ -algèbre engendrée par $\mathcal{L}_H$ (relativement à la dualité entre E/H° et H). Soit (φ_n) une suite de caractéristiques définies sur E' . Leurs restrictions sur H sont aussi des caractéristiques qui déterminent des mesures de probabilité sur $\mathcal{C}_H$.

Si ces restrictions vérifient (pour E/H° et H) les conditions de la proposition 9, quel que soit H , alors φ est une caractéristique.

Nous allons terminer ce chapitre par la proposition suivante :

Proposition 10 : Soient E un espace vectoriel localement convexe qui possèdent un système fondamental de parties bornées et $\mathcal{C}_{E'}$ -mesurables, $\varphi(x')$ la caractéristique d'une mesure de probabilité m définie sur $\mathcal{C}_{E'}$ alors $\varphi(x')$ est uniformément continue dans E' muni de la topologie forte.

Il faut démontrer que pour $a > 0$, il existe un $t > 0$, et un ensemble borné B de E tel que :

$$|\varphi(x'_1) - \varphi(x'_2)| \leq a$$

pourvu que :

$$(1) \quad \sup_{x \in B} |\langle x'_1 - x'_2, x \rangle| \leq t$$

Or d'après la proposition 1, § 1, pour tout $a > 0$, on peut trouver un ensemble borné $B_a \in \mathcal{C}_{E'}$ tel que $m(B_a) > 1 - a/3$.

Soit $t > 0$ tel que :

$$(2) \quad \left| 1 - e^{i\langle y', x \rangle} \right| \leq a/3 \quad \text{lorsque} \quad \sup_{x \in B_a} |\langle y', x \rangle| \leq t$$

Soient maintenant x'_1, x'_2 deux éléments de E qui vérifie (1) pour B_a . On obtient :

$$\begin{aligned} |\varphi(x'_1) - \varphi(x'_2)| &= \left| \int e^{i\langle x'_1, x \rangle} dm - \int e^{i\langle x'_2, x \rangle} dm \right| \leq \\ &\int |e^{i\langle x'_1, x \rangle} (1 - e^{i\langle y', x \rangle})| dm \quad (y' = x'_2 - x'_1) \end{aligned}$$

Mais :

$$\begin{aligned} \int |e^{i\langle x'_1, x \rangle} (1 - e^{i\langle y', x \rangle})| dm &= \int_{B_a} |1 - e^{i\langle y', x \rangle}| dm + \\ &\int_{B'_a} |1 - e^{i\langle y', x \rangle}| dm \end{aligned}$$

le deuxième terme du second membre est inférieur à $2a/3$, car $|1 - e^{i\langle y', x \rangle}| \leq 2$, et $m(E \cdot B_a) \leq a/3$. Quant au premier terme, il est inférieur à $a/3$ d'après (2). Ce qui achève la démonstration.

CHAPITRE III

MESURES ALEATOIRES

I. — NOTATIONS ET DEFINITIONS

Rappelons que $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ désigne un espace de probabilité. $\mathcal{T}(B)$ ou simplement $\mathcal{T}$, désignera l'ensemble des parties non vides de B . Soit C un autre ensemble, et $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}(B)$. $\mathcal{T}_1 \cap C$ désignera l'ensemble :

$$\{ M : M = N \cap C \neq \emptyset, N \in \mathcal{T}_1 \}$$

Si B est un espace topologique, et $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}(B)$, nous désignerons par $\overline{\mathcal{T}}_1$ l'ensemble : $\{ \overline{M} : M \in \mathcal{T}_1 \}$.

Soient E et G deux espaces quelconques, et H un ensemble d'applications de E dans G . Si x appartient à E , nous désignerons par $H(x)$ la partie de G formée des $u(x)$ lorsque u parcourt H . De même si F est une base de filtre sur G^E , les $H(x)$ forment, lorsque H parcourt F , une base de filtre sur G , que nous désignerons par $F(x)$.

T désigne un espace localement compact, $\mathcal{K}(T)$ ou simplement $\mathcal{K}$, l'espace vectoriel des fonctions réelles sur T qui sont continues et à support compact. Pour toute partie B de T , $\mathcal{K}(T, B)$ désigne le sous-espace de $\mathcal{K}(T)$ des fonctions dont le support est contenu dans B .

Définition 1 — On appelle mesure sur T tout élément de

$\mathcal{M}(T)$ dual de $\mathcal{K}(T)$ muni de la topologie limite inductive des topologies de la convergence uniforme sur chacun des sous-espaces $\mathcal{K}(T, B)$ lorsque B parcourt l'ensemble des parties compactes de T .

Si μ est une mesure continue sur $\mathcal{K}(T)$ muni de la topologie de la convergence uniforme dans T , on dit que μ est une mesure bornée sur T . L'ensemble $\mathcal{M}_1(T)$ des mesures bornées sur T est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}(T)$.

Soit μ une mesure sur T . On peut prolonger cette mesure sur un ensemble de fonctions plus large que $\mathcal{K}(T)$. Nous désignerons indifféremment par μ la mesure ainsi que son prolongement.

Soient μ une mesure positive et bornée sur T , B une partie μ -mesurable de T , et φ_B la fonction caractéristique de B . Il est facile de vérifier que l'application qui fait correspondre à toute $f \in \mathcal{K}(T)$ le nombre $\mu(f \varphi_B)$ est une mesure positive et bornée sur T qu'on désigne par μ^B . Si B est un sous-espace localement compact de T , l'application qui fait correspondre à toute $f \in \mathcal{K}(B)$ le nombre $\mu(f)$ est une mesure sur B ; c'est par définition la mesure induite par μ sur B , et elle sera désignée par ${}_{B\mu}$. Il est évident que pour toute $f \in \mathcal{K}(B)$ on a :

$$\mu^B(f) = {}_{B\mu}(f)$$

Dans le cas où $T = \mathbb{R}^k$, nous désignerons par A_μ ou simplement A l'ensemble des atomes de μ , et par $\mathcal{O}_\mu$ ou simplement $\mathcal{O}$ l'ensemble des hyperplans :

$$\{D : \mu^{A'}(D) \neq 0, A' = \mathbb{R}^k - A\}$$

Nous appellerons topologie vague sur $\mathcal{M}(T)$ la topologie

$\sigma(\mathcal{M}(T), \mathcal{K}(T))$. Si on désigne par $\mathcal{E}_{\mathcal{K}}$ la σ -algèbre engendrée par l'algèbre des ensembles cylindrique de $\mathcal{M}(T)$ relatifs à la dualité entre $\mathcal{M}(T)$ et $\mathcal{K}(T)$, on peut poser la définition suivante.

Definition 2 : MESURES ALEATOIRES : Soient T un espace localement compact, et $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité. Tout $\mathcal{E}_{\mathcal{K}}$ -élément aléatoire est par définition une mesure aléatoire.

2. - GENERALISATION DU THEOREME DE GLIVENKO-CANTTELLI

Soient X un élément aléatoire dans R^k , λ une mesure sur la σ -algèbre $\mathcal{B}^k$ de tous les ensembles boréliens de R^k , définie par :

$$\lambda(E) = \text{Prob.}[X \in E] \quad \forall E \in \mathcal{B}^k$$

et (X_n) une suite stationnaire d'éléments aléatoires et de même loi que X . Soient μ_n la mesure aléatoire définie par la masse unité placée au point X_n , et ν_n la mesure aléatoire $1/n \sum_{i=1}^n \mu_i \cdot \lambda$, μ_n , et ν_n désignerons dans toute la suite des mesures fabriquées de cette manière.

Une des versions du théorème Glivenko-Cantelli est la suivante : si $k = 1$, et si les X_n sont indépendants, alors ν_n converge vers λ uniformément p.c. sur la classe de tous les intervalles de R .

Fortet et Mourier [15] ont généralisé le théorème de Glivenko-Cantelli dans le cas d'un espace métrique séparable et complet E , en définissant les mesures de manière à pouvoir les considérer comme éléments d'un espace de Banach séparable et à pouvoir appliquer ensuite le théorème de Mourier sur la loi des grands nombres [25].

Wolfowitz [40] a généralisé ce théorème en démontrant que pour $k > 1$, ν_n converge vers λ uniformément p.c. sur la classe de tous les demi-espaces de R^k .

Le but principal de ce chapitre est d'étudier ce problème dans le cas de R^k avec $k > 1$. Les résultats de ce chapitre généralisent les résultats de Wolfowitz, quant aux méthodes employées elles sont totalement différentes de ses méthodes.

Lemme 1 : Soient F un filtre sur l'ensemble des mesures positives et bornées sur R^k , μ une mesure bornée et positive sur R^k , $\mathcal{T}_1$ un ensemble de parties $\mathcal{B}^k$ -mesurables de R^k , et (Q_i) une suite de sous-ensembles de R^k telle que pour tout j et tout n , $F(\bigcup_{i=j}^n Q_i)$ converge vers $\mu(\bigcup_{i=j}^n Q_i)$. Si la suite (Q_i) est croissante ou est telle que tout $C \in \mathcal{T}_1 \cap (\bigcup_{i=1}^n Q_i)$ peut s'écrire sous la forme :

$$C = \bigcup_{i=1}^n N_i$$

avec $N_i \cap N_j = \emptyset$ et $N_i \in \mathcal{T}_1 \cap Q_i$, et si F converge vers μ uniformément sur $\mathcal{T}_1 \cap Q_i$ pour tout i , alors F converge vers μ uniformément sur $\mathcal{T}_1 \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i)$.

Désignons par B_n et B les ensembles $\bigcup_{i=1}^n Q_i$ et $\bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$ respectivement. Soit $\varepsilon > 0$ donné ; il existe un n_ε tel que :

$$(1) \quad \mu(B_{n_\varepsilon}) \geq \mu(B) - \varepsilon/2^3$$

d'où :

$$(2) \quad \mu(C) \leq \varepsilon/2^3$$

pour tout sous-ensemble $\mathcal{B}^k$ -mesurable $C \subset B - B_{n_\varepsilon}$. Il existe d'autre part, par hypothèse un $H_0 \in F$ tel que l'on ait $\forall \gamma \in H_0$:

$$(3) \quad |\gamma(B - B_{n_\varepsilon}) - \mu(B - B_{n_\varepsilon})| \leq \varepsilon/2^3$$

On en conclut, compte tenu de (2), que $\forall \gamma \in H_0$:

$$(4) \quad \gamma(B - B_{n_\varepsilon}) \leq 2\varepsilon/2^3$$

Ce qui implique $\forall \gamma \in H_0$, et $\forall C \subset B - B_{n_\varepsilon}$:

$$(5) \quad \gamma(C) \leq 2\varepsilon/2^3$$

Mais, pour tout i , il existe par hypothèse un $H_i \in F$ tel que l'on ait $\forall \gamma \in H_i$, et $\forall C \subset \mathcal{C}_1 \cap Q_i$:

$$(6) \quad |\gamma(C) - \mu(C)| \leq \varepsilon/2^{i+3}$$

Soit maintenant $\gamma \in H_0 \cap H_1 \cap \dots \cap H_{n_\varepsilon}$, et M un élément quelconque de $\mathcal{C}_1 \cap B$. On a par hypothèse, ou bien $B_{n_\varepsilon} = Q_{n_\varepsilon}$, ce qui implique d'après (2), (5), et (6), que :

$$\begin{aligned} |\gamma(M) - \mu(M)| &= |\gamma\{(M \cap Q_{n_\varepsilon}) \cup (M - Q_{n_\varepsilon})\} - \\ &\mu\{(M \cap Q_{n_\varepsilon}) \cup (M - Q_{n_\varepsilon})\}| \leq |\gamma(M \cap Q_{n_\varepsilon}) - \\ &\mu(M \cap Q_{n_\varepsilon})| + \gamma(M - Q_{n_\varepsilon}) + \mu(M - Q_{n_\varepsilon}) \leq \\ &\varepsilon/2^{n_\varepsilon+3} + 2\varepsilon/2^3 + 2\varepsilon/2^3 \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

ou bien $M \cap B_{n_\varepsilon}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon} N_i \quad \text{avec} \quad N_i \in \mathcal{C}_1 \cap Q_i \quad \text{et} \quad N_i \cap N_j = \emptyset$$

d'où :

$$\begin{aligned} |\gamma(M) - \mu(M)| &= |\gamma\{(M \cap B_{n_\varepsilon}) \cup (M - B_{n_\varepsilon})\} - \\ &\mu\{(M \cap B_{n_\varepsilon}) \cup (M - B_{n_\varepsilon})\}| \leq |\gamma(\bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon} N_i) - \mu(\bigcup_{i=1}^{n_\varepsilon} N_i)| + \\ &\gamma(M - B_{n_\varepsilon}) + \mu(M - B_{n_\varepsilon}) \leq \sum_{i=1}^{n_\varepsilon} \varepsilon/2^{i+3} + 2\varepsilon/2^3 + 2\varepsilon/2^3 \leq \varepsilon \end{aligned}$$

d'après (2), (5), (6) Ce qui achève la démonstration.

Lemme 2 : Soit Q un carré de R^2 $\mathcal{R}$ une partition de Q formée de j^2 carrés égaux, C un sous-ensemble convexe de Q , et $Fr(C)$ sa frontière. On peut recouvrir $Fr(C)$ par un nombre d'éléments de $\mathcal{R}$ inférieur à $16j$.

En effet les $2j$ lignes droites qui déterminent $\mathcal{R}$ coupent $Fr(C)$ en $4j$ points au plus (C est convexe). Désignons par G la réunion des éléments de $\mathcal{R}$ qui contiennent ces points de rencontre. En remarquant que chacun de ces points peut être contigu à 4 éléments de $\mathcal{R}$ au plus, on en conclut que le nombre des éléments de $\mathcal{R}$ qui donnent G est au plus égal à $16j$. Soit maintenant x un point du $Fr(C)$, et soit E un élément de $\mathcal{R}$ qui le contient, Si x est intérieur à E , un de cotés de E au moins coupe $Fr(C)$, d'où $E \subset G$. Si x est sur un côté de E , il appartient évidemment à G , Ce qui achève la démonstration.

Proposition 1 : Si un filtre borné F sur l'ensemble des mesures positives sur R^k converge vaguement vers une mesure positive μ absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue $L(\mu \ll L)$, il converge iniformement vers μ sur la classe $\mathcal{C}$ de tous les ensembles convexes non vides et L -mesurables de R^k .

Nous allons raisonner sur R^2 mais les résultats restent valables dans le cas général.

Soit (Q_i) une suite croissante de carrés $\mathcal{B}^2$ -mesurables qui tend vers R^2 . D'après le lemme 1, il suffit de démontrer que, pour tout i , F converge vers μ uniformément sur $\mathcal{C} \cap Q_i$.

Comme $\mu \ll L$, il est facile de vérifier que $F(I)$ converge vers $\mu(I)$ quel que soit l'intervalle I de R^2 . D'autre part, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$(1) \quad L(E) \leq \eta \Rightarrow \mu(E) \leq \varepsilon, 2^2$$

Soit $\mathcal{R}_i$ une partition de Q_i en j^2 carrés tels que l'on ait pour tout $E \in \mathcal{R}_i$:

$$(2) \quad \gamma(E) \leq \eta/16j$$

L'ensemble des parties de Q_i qui sont réunion d'éléments de $\mathcal{R}_i$, étant fini, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un $H \in \mathcal{F}$ tel que l'on ait pour toute $\gamma \in H$, et toute réunion M d'éléments de $\mathcal{R}_i$:

$$(3) \quad |\gamma(M) - \mu(M)| \leq \varepsilon/2^j$$

Soient maintenant C un ensemble convexe, $\mathcal{B}^2$ -mesurable et non vide dans Q_i , et G la réunion des carrés de la partition $\mathcal{R}_i$ qui couvre juste $\text{Fr}(C)$. G est la réunion de $16j$ éléments de $\mathcal{R}_i$ au plus (lemme 2), d'où compte tenu de (1) et de (2) :

$$(4) \quad \mu(G) \leq \varepsilon/2^2$$

On obtient aussi d'après (3) que, quel que soit $\gamma \in H$:

$$(5) \quad |\gamma(G) - \mu(G)| \leq \varepsilon/2^2$$

$$(6) \quad |\gamma(G \cup C) - \mu(G \cup C)| \leq \varepsilon/2^2$$

d'où :

$$(7) \quad \gamma(G) \leq \mu(G) + \varepsilon/2^2 \leq 2\varepsilon/2^2$$

Tenant compte de (6), (7), et (4), on obtient :

$$\begin{aligned} |\gamma(C) - \mu(C)| &= |\gamma(C) + \gamma(G \cap (Q_i - C)) - \\ &\quad - \mu(C) - \mu(G \cap (Q_i - C)) - \gamma(G \cap (Q_i - C)) + \\ &\quad + \mu(G \cap (Q_i - C))| \leq \\ &\leq |\gamma(C \cup G) - \mu(C \cup G)| + \gamma(G) + \mu(G) \leq \\ &\leq \varepsilon/2^2 + \varepsilon/2^2 + \varepsilon/2^2 \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration .

Proposition 2 : Soit F un filtre borné sur l'espace des mesures aléatoires positives sur R^k . Si F converge vaguement p.c. vers une mesure aléatoire $\xi \ll L$, alors il converge vers ξ uniformément p.c. sur la classe $\mathcal{C}$ de tous les ensembles convexes L -mesurables et non vides de R^k .

En effet, il existe un ensemble $S \in \mathcal{F}$ tel que $P(S) = 1$, et $\forall \omega \in S, F(\omega)$ converge vaguement vers $\xi(\omega) \ll L$. Il suffit pour démontrer notre assertion d'appliquer la proposition 1 .

Soient E et G deux espaces vectoriels en dualité. Nous dirons qu'un filtre F sur l'espace des $\mathcal{C}_G$ -éléments aléatoires est borné, s'il existe une partie B bornée de E (pour les topologies compatibles avec la dualité entre E et G), un $S \in \mathcal{F}$, et un $H \in F$ tels que :

$$P(S) = 1 \text{ et } \xi(\omega) \in B, \forall \xi \in H \text{ et } \forall \omega \in S .$$

Proposition 3 : Soient E la dual d'un espace tonnelé séparable G , (ξ_n) une suite bornée de $\mathcal{C}_G$ -éléments aléatoires qui converge faiblement p.c. vers l'éléments aléatoire ξ , alors $\forall \varepsilon > 0$, il existe un $S \in \mathcal{F}$ tel que $P(S) > 1 - \varepsilon$ et ξ_n converge faiblement uniformément sur S .

L'adhérence d'une partie bornée dans un espace vectoriel topologique étant borné, il existe par hypothèse un sous-ensemble B de E qui est borné $\sigma(E, G)$ -fermé (donc $\sigma(E, G)$ -compact [9,p.65]), et tel que $\xi_n \in B$ p.c. . Ce qui implique que $\xi \in B$ p.c. . Soit C l'ensemble $\{ x : x = y - z, y, z \in B \}$. C est $\sigma(E, G)$ -compact [9, p. 8], et $\xi_n - \xi \in C$ p.c. . G étant séparable, C est métrisable pour la topologie induite sur C par $\sigma(E, G)$. Comme $0 \in C$, il existe donc un système fondamental dénombrable de voisinages de 0 pour cette topologie induite . Soit (V_n) ce

système. On ne restreint pas la généralité si on considère les V_n décroissants. Soit :

$$E_n^m = \bigcap_{i=n} \{ \omega : \xi_i(\omega) - \xi(\omega) \in V \}$$

Il est évident que :

$$E_1^m \subset E_2^m \subset \dots \subset \dots$$

et comme $\xi_n - \xi$ converge vers 0 faiblement p.c., on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(E_n^m) = 1$$

d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\Omega - E_n^m) = 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc un entier positif $n_0(m)$ tel que :

$$P(\Omega - E_{n_0(m)}^m) \leq \varepsilon/2^m$$

L'ensemble $Q = \bigcup_{m=1} (\Omega - E_{n_0(m)}^m)$ est mesurable et on a : $P(Q) < \varepsilon$. On voit facilement que $P(\Omega - Q) > 1 - \varepsilon$ et que pour tout $\omega \in \Omega - Q$:

$$\xi_n(\omega) - \xi(\omega) \in V_m \quad \forall n > n_0(m)$$

Ce qui achève la démonstration.

Proposition 4 : Soit (ξ_n) une suite bornée de mesures aléatoires positives sur R^k , qui converge vaguement p.c. vers une mesure positive $\mu \leq L$, alors quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $S \in \mathcal{F}$ tel que $P(S) = 1 - \varepsilon$ et tel que ξ_n converge vers μ uniformément sur $S \times \mathcal{C}$.

En effet $\mathcal{M}(R^k)$ est le dual de l'espace tonnelé $\mathcal{K}(R)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, et tout voisinage V de 0 dans $\mathcal{M}(R^k)$ muni de la topologie vague, il existe donc, d'après la proposition 3, un $S \in \mathcal{F}$ tel que $P(S) > 1 - \varepsilon$, et un entier $n_V > 0$, tel que :

$\xi_n(\omega) \in \mu + V$ pour tout $n > n_V$ et tout $\omega \in S$.

Désignons par H_n l'ensemble : $H_n = \bigcup_{\substack{\omega \in S \\ i \geq n}} \{ \xi_i(\omega) \}$. Les H_n forment un filtre sur $\mathcal{M}(R^k)$. En effet pour tout n , on a $H_n \neq \emptyset$, et $H_{n_1} \cap H_{n_2}$ contient $H_{\sup(n_1, n_2)}$.

Désignons ce filtre par F . Je dit que F converge vaguement vers μ . En effet V étant donné, il existe un n_V tel que :

$$\xi_n(\omega) \in \mu + V \quad \forall n > n_V, \forall \omega \in S$$

c'est-à-dire que $H_{n_V} \subset \mu + V$. Ce qui prouve bien que F converge vaguement vers μ . μ étant absolument continue par rapport à L , il existe (prop. 1) pour tout $\varepsilon > 0$ un $H_n \in F$ tel que :

$$|\gamma(c) - \mu(c)| < \varepsilon, \quad \forall \gamma \in H_n, \quad \text{et} \quad \forall c \in \mathcal{C}$$

c'est-à-dire tel que :

$$|\langle \xi_i(\omega), \varphi_c \rangle - \mu(c)| \leq \varepsilon, \quad \forall i \geq n, \text{ et } \forall \omega \in S.$$

Ce qui achève la démonstration ,

APPLICATIONS :

Soient (X_n) une suite stationnaire d'éléments aléatoires dans R^k qui sont de même loi que X , et λ la mesure de probabilité sur $\mathcal{B}^k$ déterminée par X .

Lemme 3 : Si B est une partie L -mesurable, alors ν_n^B converge vaguement p.c. vers une mesure de probabilité aléatoire γ^B sur $\mathcal{B}^k$.

Pour toute fonction $f \in \mathcal{K}(R^k)$ on a en effet :

$$\nu_n^B(f) = 1/n \sum_{i=1}^n f(X_i) \varphi_B(X_i)$$

d'où $\nu_n^B(f)$ converge p.c. . Mais (ν_n^B) est bornée et $\mathcal{K}(R^k)$ est

séparable, il suffit donc pour achever la démonstration d'appliquer la proposition 4 du chapitre I, § 3.

Remarque : Si les X_n sont indépendants, alors $\gamma^B = \lambda^B$ p.c. .

Proposition 5 : Si les X_n sont indépendants, et si $\lambda^B \ll L$, alors ν_n^B converge vers λ^B uniformément p.c. sur la classe $\mathcal{C}$.

Proposition 6 : Si les X_n sont indépendants, et $\lambda \ll L$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $S \in \mathcal{T}$ tel que $P(S) > 1 - \varepsilon$ et tel que ν_n converge vers λ , uniformément sur $S \times \mathcal{C}$.

Les propositions 5 et 6 ne sont pas valables si λ n'est pas absolument continue par rapport à L .

Contr Exemple : Soit (X_n) une suite d'éléments aléatoires indépendants dans R^2 , de même loi que X . Désignons par λ la mesure de probabilité déterminée sur $\mathcal{B}^2$ par K , et supposons que λ est portée par la frontière $\text{Fr}(C)$ d'un ensemble convexe ouvert C de R^2 , et équidistribuée sur elle. Soit C_n l'ensemble convexe déterminée par le polygône de sommets $X_1, \dots, X_n$. Il est évident que p.c. $\nu_n(C_n) = 1$, et $\lambda(C) = 0$.

Cependant cette proposition est généralisable comme nous allons le voir dans la suite.

Soient Q un sous-ensemble non vide, compact et convexe de R^k , $\mathcal{C} \cap Q$ l'ensemble des parties convexes non vides de Q , ε un nombre positif donné, $C_0 \subset Q$, et d une distance qui définit la topologie de R^k . Désignons par $V(C_0)$ l'ensemble :

$$V(C_0) = \left\{ C : C \subset Q, \sup_{t \in C - C_0} d(t, C_0) < \varepsilon, \sup_{t \in C_0 - C} d(t, C) < \varepsilon \right\}$$

Il est facile de vérifier que les $V(C_0)$ forment un système fondamental de voisinages de C_0 pour une topologie $\mathcal{T}_Q$ sur $\mathcal{P}(Q)$.

Lemme 4 : $\bar{\mathcal{C}} \cap Q$ est $\mathfrak{T}_Q$ -compact [8, p. 104, exerc. 9].

Soient μ une mesure positive et bornée sur R , A l'ensemble des atomes de μ , et F un filtre sur l'ensemble des mesures positives et bornées sur R . Les $H^{A'} = \{ \gamma^{A'} : \gamma \in H \in F \}$ engendrent un filtre qu'on désigne par $F^{A'}$.

Lemme 5 : Soient μ une mesure positive et bornée sur R , et F un filtre sur l'ensemble des mesures positives et bornées sur R . Si $F(\{a\})$ converge vers $\mu(\{a\}) \forall a \in A$, et si $F^{A'}$ converge vaguement vers $\mu^{A'}$, alors F converge vers μ uniformément sur la classe $\mathcal{C}$ de tous les intervalles non vides de R .

Soit (I_i) une suite croissante d'intervalles de R qui tend vers R . D'après le lemme 1, il suffit de démontrer la proposition pour la classe $\mathcal{C} \cap I_i$ quel que soit i .

1°) Il est évident que $\mu^{A'}(\text{Fr}(I)) = 0$ quel que soit l'intervalle I de R . Comme $F^{A'}$ converge vers $\mu^{A'}$ vaguement (par hypothèse), on en conclut que $F^{A'}(I)$ converge vers $\mu^{A'}(I)$ pour tout I . Soit i donné, et soient $\varepsilon > 0$, et $\mathcal{R}_i = \{I_{ij}\}$ une partition finie de I_i telle que $I_{ij} \in \mathcal{C} \cap I_i$, et

$$(1) \quad \mu^{A'}(I_{ij}) \leq \varepsilon/2^3 \quad \forall j$$

$\mathcal{R}_i$ étant finie, il existe un $H_i \in F$ tel que l'on ait pour toute $\gamma \in H_i$, et pour toute réunion B d'éléments de $\mathcal{R}_i$:

$$(2) \quad |\gamma^{A'}(B) - \mu^{A'}(B)| \leq \varepsilon/2^3$$

Soit maintenant I un intervalle de I_i , et soit B la réunion des éléments de $\mathcal{R}_i$ qui couvrent juste I . $B-I$ est contenu dans deux éléments de $\mathcal{R}_i$ au plus. On obtient donc, d'après (1) et (2) :

$$(3) \quad \gamma^{A'}(B-I) \leq 2\varepsilon/2^3 \quad \forall \gamma \in H_i$$

d'où :

$$(4) \quad \begin{aligned} |\gamma^{A'}(I) - \mu^{A'}(I)| &= |\gamma^{A'}(B - (B - I)) - \\ &- \mu^{A'}(B - (B - I))| \leq |\gamma^{A'}(B) - \mu^{A'}(B)| + \\ &+ \gamma^{A'}(B - I) + \mu^{A'}(B - I) \leq \varepsilon/2^3 + 2\varepsilon/2^3 + \varepsilon/2^3 \leq \varepsilon/2 \end{aligned}$$

d'après (1), (2), et (3).

2°) Comme A est dénombrable et $F(\{a\})$ converge vers $\mu(\{a\}) \forall a \in A$, on en conclut (lemme 1) que F converge vers μ uniformément sur $\mathcal{T}(A)$. $\forall \varepsilon > 0$, il existe donc un $H_2 \in \mathcal{F}$ tel que :

$$(5) \quad |\gamma(C) - \mu(C)| \leq \varepsilon/2 \quad \forall C \in \mathcal{T}(A), \text{ et } \forall \gamma \in H_2.$$

3°) Soit maintenant I un intervalle quelconque de I_1 , et $\gamma \in H_1 \cap H_2$. On a :

$$\begin{aligned} |\gamma(I) - \mu(I)| &= |\gamma\{(I-A) \cup (I \cap A)\} - \mu\{(I-A) \cup (I \cap A)\}| = \\ &= |\gamma(I-A) - \mu(I-A) + \gamma(I \cap A) - \mu(I \cap A)| = \\ &= |\gamma^{A'}(I) - \mu^{A'}(I) + \gamma(I \cap A) - \mu(I \cap A)| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

d'après (4) et (5). Ce qui achève la démonstration.

Soient (X_n) une suite d'éléments aléatoires indépendants et de m même loi, dans R^2 , λ la mesure de probabilité déterminée sur $\mathcal{B}^2$ par l'un des X_n , $\mathcal{C}$ la classe de tous les sous-ensembles non vides, convexes et $\mathcal{B}^2$ -mesurables de R^2 , et B l'ensemble $A \cap (\bigcup_{D \in \mathcal{C}} D)$ [voir 1].

Proposition 7 : ν_n converge vers λ uniformément p.c. sur $\mathcal{C} \cap B$.

1°) A étant dénombrable, il existe un $S_1 \in \mathcal{F}$ tel que $P(S_1) = 1$, et $\forall \omega \in S_1$, $\langle \nu_n(\omega), \varphi_{\{a\}} \rangle$ converge vers $\lambda(\{a\})$

pour tout $a \in A$. En appliquant le lemme 1, on en conclut que $\nu_n(\omega)$ converge vers λ uniformément sur $\mathcal{C} \cap A = \mathcal{T}(A)$, $\forall \omega \in S_1$.

2°) En remarquant que tout élément $C \in \mathcal{C} \cap B$ peut s'écrire sous la forme $C = G \cup \bigcup_{D \in \mathcal{D}} I_D$ avec $G \subset A$, $I_D \in \mathcal{C} \cap D$, $I_D \cap I_{D'} = \emptyset$, et $G \cap I_D = \emptyset$; on en conclut, d'après le lemme 1, que pour achever la démonstration, il suffit de démontrer la proposition pour la classe $\mathcal{C} \cap D$, $\forall D$.

Soit D un élément quelconque de $\mathcal{D}$, il existe un $S_2 \in \mathcal{F}$ tel que $P(S_2) = 1$ et ${}_{\mathcal{D}}\nu_n^{A'}(\omega)$ converge vaguement vers ${}_{\mathcal{D}}\lambda^{A'} \forall \omega \in S_2$ (prop. 5). Soit $\omega \in S_1 \cap S_2$, on obtient $\langle \nu_n(\omega), \Phi_{\{a\}} \rangle$ converge vers ${}_{\mathcal{D}}\lambda(\{a\}) \forall a \in A \cap D$ d'après 1°, et ${}_{\mathcal{D}}\nu_n^{A'}(\omega)$ converge vaguement vers ${}_{\mathcal{D}}\lambda^{A'}$. Il suffit donc d'appliquer le lemme 5.

Proposition 8 : Soit $\mathcal{C}_1$ un sous-ensemble de $\mathcal{C}$ tel que $\overline{\mathcal{C}_1} \cap Q$ soit $\mathcal{G}_Q$ -compact quel soit l'ensemble convexe et compact Q . Si $\lambda^{B'}(\text{Fr}(C)) = 0$ pour tout $C \in \mathcal{C}_1$, alors ν_n converge vers λ uniformément p. c. sur la classe $\mathcal{C}_1$.

En effet soit (Q_i) une suite croissante de carrés fermés qui tend vers R^2 . D'après le lemme 1, il suffit de démontrer la proposition pour $\mathcal{C}_1 \cap Q_i$, $\forall i$. Soit donc Q_i donné. Il est évident que $\lambda^{B'}(\text{Fr}(Q_i)) = 0$, d'où $\lambda^{B'}(\text{Fr}(C)) = 0$, $\forall C \in \mathcal{C}_1 \cap Q_i$. Soient k un entier positif, $C_j \in \mathcal{C}_1 \cap Q_i$, et C_{jk}^-, C_{jk}^+ deux sous-ensembles convexes et ouverts de Q_i tel que :

$$(1) \quad C_{jk}^- \subset \overline{C_j} \subset C_{jk}^+ \quad \lambda^{B'}(C_{jk}^+ - C_{jk}^-) \leq 1/5k$$

Désignons par $W^k(\overline{C_j})$ l'ensemble :

$$W^k(\bar{C}_j) = \{C : C \subset Q_i, \bar{C}_{jk} \subset C \subset C_{jk}^+\}.$$

Il est évident que W^k est un voisinage de $\bar{C}_j$ pour $\mathcal{G}_{Q_i}$. Mais comme $\bar{C}_1 \cap Q_i$ est $\mathcal{G}_{Q_i}$ -compact, il existe un nombre fini $(C_j)_{1 \leq j \leq p}$ d'éléments de $\mathcal{C}_1 \cap Q_i$ tels que les $W^k(\bar{C}_j)$ forment un recouvrement de $\bar{C}_1 \cap Q_i$. Il existe par conséquent un $S_1 \in \mathcal{F}$ tel que $P(S_1) = 1$, et $\forall k$, il existe un $n_{k,1}$ tel que :

$$(2) \quad \left| \langle \nu_n^{B'}(\omega), \varphi_{jk}^+ \rangle - \lambda^{B'}(C_{jk}^+) \right| \leq 1/5k$$

$$(3) \quad \left| \langle \nu_n^{B'}(\omega), \varphi_{(C_{jk}^+ - C_{jk}^-)} \rangle - \lambda^{B'}(C_{jk}^+ - C_{jk}^-) \right| \leq 1/5k$$

et cela :

$$\forall n \geq n_{k,1}, \quad \forall j : 1 \leq j \leq p, \quad \forall \omega \in S_1$$

Soit k un entier positif donné, et C un élément quelconque de $\mathcal{C}_1 \cap Q_i$. Il existe un C_j tel que $\bar{C} \in W^k(\bar{C}_j)$, c'est-à-dire $C_{jk}^- \subset \bar{C} \subset C_{jk}^+$. C étant convexe, et C_{jk}^-, C_{jk}^+ ouverts, on obtient :

$$(4) \quad C_{jk}^+ \subset C \subset C_{jk}^+$$

D'autre part, il existe d'après la proposition 7, un $S \in \mathcal{F}$ tel que $P(S) = 1$, et $\forall \omega \in S$ il existe un entier positif $n_{k,2}$ tel que :

$$(5) \quad \left| \langle \nu_n(\omega), \varphi_{C \cap B} \rangle - \lambda(C \cap B) \right| \leq 1/5k \quad \forall n \geq n_{k,2}$$

Soit $\omega \in S \cap S_1$, et $n \geq \sup(n_{k,1}, n_{k,2})$; on obtient :

$$\begin{aligned} & \left| \langle \nu_n(\omega), \varphi_C \rangle - \lambda(C) \right| = \left| \langle \nu_n(\omega), \varphi_{C \cap B} \rangle - \lambda(C \cap B) \right| + \\ & + \left| \langle \nu_n^{B'}(\omega), \varphi_C \rangle - \lambda^{B'}(C) \right| = \left| \langle \nu_n(\omega), \varphi_{C \cap B} \rangle - \lambda(C \cap B) \right| + \\ & + \left| \langle \nu_n^{B'}(\omega), \varphi_{C_{jk}^+} \rangle - \lambda^{B'}(C_{jk}^+) - \langle \nu_n^{B'}(\omega), (C_{jk}^+ - C) \rangle + \right. \\ & \left. \lambda^{B'}(C_{jk}^+ - C) \right| \leq 1/5k + 1/5k + 2/5k + 1/5k = 1/k \end{aligned}$$

d'après (1), (2), (3), et (4). Ce qui achève la démonstration.

Exemples — 1) $\mathcal{C}_1 = B_1 = \{ \{x\} : x \in \mathbb{R}^2 \}$

2) $\mathcal{C}_1 = B_2 =$ l'ensemble des parties convexes $\mathcal{B}^2$ -mesurables dont les frontières sont formées d'un nombre fini de segments de droite, ou par une infinité dénombrable (I_i) de segments de droite telle que $\inf (L_i) \neq 0$ (L_i étant la longueur de I_i).

3) $\mathcal{C}_1 = B_1 \cup B_2$

4) $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}$ avec $\lambda \ll L$.

5) $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}$ avec $\lambda(\text{Fr}(C)) = 0 \ \forall C \in \mathcal{C}$.

Remarque : La proposition 8 n'est pas valable lorsque $\mathcal{C}_1$ n'est pas $\mathcal{T}_Q$ -compact pour tout Q . Le contre exemple ci-dessus peut servir comme contre exemple. Ce qui rectifie notre note aus comptes rendus [3], où une erreur s'est glissée à la fin.

CHAPITRE IV

SUR LA PROBABILITE POUR QU'UNE SETIE ENTIERE A COEFFICIENTS ALEATOIRES PUISSE ETRE PROLONGER

Dans ce chapitre, nous étudions le problème concernant la probabilité de prolonger au delà de son cercle de convergence, une série entière à coefficients aléatoires. Certains raisonnements ont permis à Borel et Pringheim [31] d'affirmer que le cercle de convergence d'une série entière est en général une coupure. Ce qui veut dire « grosso modo » que parmi les séries entières admettant le même cercle de convergence C , l'ensemble e de celles qui sont prolongeables au delà de C est moins vaste que l'ensemble E de celles qui ne le sont pas.

E et e ayant la même puissance [30], cet énoncé n'est pas significatif de ce point de vue.

Polya, afin de justifier cette assertion, a défini une topologie « convenable » sur l'ensemble $E \cup e$ et a démontré les deux propositions suivantes :

1°) L'ensemble E est partout dense et n'a que des éléments intérieures.

2°) L'ensemble e n'a que des éléments isolés.

Mais M. Fréchet [16], a remarqué que E et e ayant tous les deux la puissance du continu, on peut trouver une correspondance biunivoque entre e et R^2 , et une correspondance biuni-

voque entre E et une droite quelconque de R^2 ; on obtiendrait ainsi deux propositions qui seront celles de Polya où l'on aurait permuté E et e . Ce qui montre, comme l'a dit M. Fréchet que la nébulosité qu'il s'agissait de dissiper n'a été que déplacée.

Steinhaus [37], en choisissant l'interprétation sthocastique, a démontré la proposition suivante :

Théorème de Steinhaus : Soit $\Psi \equiv (\Psi_n)$ une suite de variables aléatoires indépendantes, uniformément distribuées entre 0 et 2π , alors la série $\sum e^{i\Psi_n} z^n$ admet le cercle unitaire comme coupure p. c. .

En suivant une voie différente, nous avons démontré la proposition suivante :

Proposition 1 : Soit $\Psi \equiv (\Psi_n)$ une suite de variables aléatoires indépendantes (qui ne sont pas nécessairement de même loi) telles que pour tout n :

$$|E(e^{i\Psi_n})| \leq a < 1 \quad (a > 0)$$

alors la série $\sum e^{i\Psi_n} z^n$ admet le cercle unitaire comme coupure p. c. .

La démonstration repose sur les deux lemmes suivantes :

Lemme 1 : Soit $\Psi \equiv (\Psi_n)$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui vérifient les conditions de la proposition 1, (c_n) une suite de nombres réels, alors $\sum c_n^2 < \infty$ est une condition nécessaire pour que la série $\sum c_n e^{i\Psi_n}$ converge p. c. .

En effet, il suffit de remarquer que les deux séries :

$$\sum c_n^2 \sigma^2 (\cos \Psi_n) \quad \text{et} \quad \sum c_n^2 \sigma^2 (\sin \Psi_n)$$

doivent converger.

Lemme 2 : Si c_n converge vers 0, $\lim_n \sup |c_n|^{1/n} = 1$, $\sum c_n^2 = \infty$, et $\Psi \equiv (\Psi_n)$ vérifie les conditions de la proposi-

tion 1, alors la série :

$$\sum c_n e^{i\Psi_n} z^n \dots$$

admet le cercle unitaire comme coupure p. c. .

Soit $z = e^{i\theta}$ un point quelconque du cercle unitaire. On a :

$$\sum c_n e^{i\Psi_n} z^n = \sum c_n e^{i\varphi_n} \quad \text{avec} \quad \varphi_n = \Psi_n + n\theta$$

$$|E(e^{i\varphi_n})| = |E(e^{in\theta} e^{i\Psi_n})| = |E(e^{i\Psi_n})| \leq a$$

Les φ_n vérifient elles-mêmes les conditions de la proposition, et $\sum c_n^2 = \infty$ implique d'après le lemme 1, que : $\sum c_n e^{i\varphi_n} = \sum c_n e^{i\Psi_n} z^n$ diverge p. c. .

Mais comme c_n converge, par hypothèse, vers 0, on en conclut que le point $e^{i\theta}$ du cercle unitaire est p. c. un point singulier.

Soit $(e^{i\theta_n})$ une suite de points dense sur le cercle unitaire, on trouve que la probabilité pour que tous ces points soient singuliers pour la série $\sum c_n e^{i\Psi_n} z^n$, est égal à 1. Ce qui achève la démonstration.

La démonstration de la proposition 1 est devenue maintenant assez aisée. Prenons $c_n = 1/n^{1/2}$, alors la série $\sum z^n/n^{1/2}$ ne possède sur le cercle unitaire qu'un seul point singulier $(1, 0)$. Considérons les deux séries :

$$\sum z^n/n^{1/2} \quad \text{et} \quad \sum e^{i\Psi_n} z^n$$

La série $\sum 1/n^{1/2} e^{i\Psi_n} z^n$ admet (lemme 2) le cercle unitaire comme coupure p. c. , ce qui implique que la série $\sum e^{i\Psi_n} z^n$ admet aussi le cercle unitaire comme coupure p. c. , d'après le théorème bien connu de Hadamard.

Que peut-on dire du cas général. C'est-à-dire du cas, où au lieu des $e^{i\Psi_n}$ on considère des éléments aléatoires complexes quelconques.

Definition 1 : $T = (a_{kn})$ étant une matrice telle que :

$$a_{kn} \geq 0, \forall k, n \quad \text{et} \quad \lim_k a_{kn} = 1, \forall n$$

on dit qu'une série (X_n) d'éléments aléatoires complexes est T-sommable, et de somme S si :

$$1^\circ) \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} X_n \text{ converge p. c. , } \forall k$$

$$2^\circ) \lim_k \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} X_n = S \text{ p. c. .}$$

Definition 2 : Une suite (X_n) d'éléments aléatoires complexes est dite essentiellement divergente, si on ne peut pas définir une suite de nombres certains (t_n) de sorte que :

$$X_n - t_n \xrightarrow[n]{} 0 \text{ p. c.}$$

Proposition 2 : Soit (X_n) une suite d'éléments aléatoires complexes indépendants, essentiellement divergente, et telle que $\lim_n \sup |X_n|^{1/n} = 1$, alors la série $\sum X_n z^n$ admet son cercle de convergence comme coupure p. c. .

Soit (r_k) une suite de nombres positifs compris strictement entre 0 et 1, et telle que $r_k \xrightarrow[k]{} 1$. Posons $T = (r_k^n)$, et soit M un point d'affixe $z = e^{i\theta}$. La série $\sum_{n=1}^{\infty} r_k^n X_n e^{in\theta}$ converge p. c. , et si M n'était pas singulier p. c. , $\lim_k \sum_{n=1}^{\infty} r_k^n X_n e^{in\theta}$ existerait p. c. , et $\sum X_n e^{in\theta}$ serait T-sommable. Ce qui impliquerait [24] l'existence d'une suite (t_n) telle que :

$$X_n e^{in\theta} - t_n \xrightarrow[n]{} 0 \text{ p. c.}$$

Ce qui est absurde, d'où la proposition.

Remarque : La proposition 1 est corollaire de la proposition 2. En effet $\lim_n \sup |e^{i\eta_n}|^{1/n} = 1$, et si $|E(e^{i\eta_n})| \leq a < 1, \forall n$ avec $a > 0$, la suite $(e^{i\eta_n})$ est essentiellement divergente.

Définition 3 : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière certaine . Le lieu géométrique du point M d'affixe $\rho e^{i\theta}$ avec :

$$\rho = \lim_{b \rightarrow \infty} \sup 1/b \log \left| \sum_n b^n/n! a_n e^{in\theta} \right|$$

est par définition le polygone de sommabilité de $\sum a_n z^n$.

Il est démontré [6, p. 152] que si une série admet son cercle de convergence comme coupure, ce cercle est identique à son polygone de sommabilité .

Corollaire : Si (X_n) est une suite d'éléments aléatoires complexes indépendants essentiellement divergente, et $\lim \sup |X_n|^{1/n} = 1$ p. c. , alors :

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \sup 1/b \log \left| \sum_n b^n/n! X_n \right| = 1 \text{ p. c.}$$

En effet, d'après la proposition 2, la série $\sum X_n z^n$ admet le cercle unitaire comme coupure p. c. . Le polygone de sommabilité de cette série est donc identique à ce cercle d'où :

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \sup 1/b \log \left| \sum_n b^n/n! X_n e^{in\theta} \right| = 1 \text{ p. c.}$$

Pour achever la démonstration, il suffit de prendre $\theta = 0$.

Remarque : E. Borel était le premier à prévoir qu'une série entière générale admet son cercle de convergence comme coupure, en considérant que les arguments des coefficients de la série sont arbitraires . La proposition 2 montre que même si les arguments ne sont pas arbitraires, mais bien déterminés, une série entière à coefficients aléatoires peut admettre son cercle de convergence comme coupure p. c. . Il suffit pour voir cela de prendre (X_n) essentiellement divergente avec X_n positive p. c. quel que soit n [1], [2] .

TABLES DES MATIERES

INTRODUCTION

CHAPITRE I

	Pages
§ 1	
1 — Préliminaires	1
2 — Eléments aléatoires dans un espace vectriel	4
3 — Quelques considérations topologiques	8
4 — Loi d'un élément aléaloire	12
§ 2	
1 — Espérance mathématique	13
§ 3	
1 — Loi forte des grands nombres	27

CHAPITRE II

1 — Probabilité tendues	33
2 — Fonctionnelles caractéristiques	45

CHAPITRE III

1 — Notations et Définitions	58
2 — Généralisations du Theorème de Glivenko-Cantelli	60

CHAPITRE IV

1 — Séries entières à coefficients aléatoires	74
---	----

BIBLIOGRAPHIE

S. AHMAD

- 1 — Sur la probabilité pour qu'une série entière à coefficients aléatoires puisse être prolongée, C. R. Acad. Sci. Paris, 246 (1958) 2574-2576
- 2 — Sur la probabilité pour qu'une série entière à coefficients aléatoires puisse être prolongée, C. R. Acad. Sci. Paris, 248 (1959) 2160-2161
- 3 — Sur le théorème de Glivenko-Cantelli, C. R. Acad. Sci. Paris, 252 (1961) 1413-1414

A. BADRIKIAN

- 4 — Résultats relatifs aux éléments aléatoires prentant leurs valeurs dans un espace de Banach réflexif non séparable, C. R. Acad. Sci. Paris, 246 (1958) 882-884

E. BOREL

- 5 — C. R. Acad. Sci. Paris, 123 (1896) 1051
- 6 — Leçons sur les séries divergentes, 2^o éd., Gauthier-Villars, Paris, 1928, p. 165-174

N. BOURBAKI

- 7 — Eléments de mathématiques - Livre II. ALGEBRE. Actualités Scientifiques et Industrielles N° 1236, Paris Hermann et Cie, 1955
- 8 — Eléments de mathématique - Livre V. ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES. Actualités Scientifiques et Industrielles N° 1189, Hermann et Cie 1952 .
- 9 — Eléments de mathématique - Livre V. ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES. Actualités Scientifiques et Industrielles N° 1229, Paris, Hermann et Cie 1955 .

- 10 — Eléments de mathématique - Livre VI. INTEGRATION. Actualités Scientifiques et Industrielles N° 1175. Paris, Hermann et Cie 1952 .
- 11 — Eléments de mathématique - Livre VI. INTEGRATION. Actualités Scientifiques et Industrielles N° 1244. Paris, Hermann et Cie 1956 .
- 12 — Eléments de mathématique - Livre VI. INTEGRATION. Actualités Scientifiques et Industrielles N° 1281 . Paris, Hermann et Cie 1959 .

LE CAM

- 13 — Convergence in distribution of stochastic processes, Univ. California Publ. Statist. 2 (1957). N 11 , pp. 207-236 .

R. FORTET

- 14 — Normalverteilte Zufallselmente in Banachschen Raumen, Bericht uber die Tagung Wahrscheinlichkeitsrechnung und Mathematische Statistik in Berlin, Berlin, Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1956, pp. 29-35 .

R. FORTET Et E. MOURIER

- 15 — Ann. Ec. Norm. Sup., 70 (1953) 206 .

M. FRECHET

- 16 — C. R. Acad. Sci. Paris, 165 (1917) 669 .

K. ITO

- 17 — Stationary random distributions, Mem. of the Coll. of Science, Ser.A, Vol XXVIII Math., N° 3 (1953), 209-233 .

M. L. M. GELFAND

- 18 — Generalised Random Processes, Dokl. Nauk. SSSR, 100 (1955) 853-856 .

GETOOR

- 19 — On characteristic function of Banach space-valued random variable, Pacific J. Math. 7 (1957) 885-897 .

P. R. HALMOS

20 — Measure Theory, New-York, Van Norstand, 1950 .

O. HANS

21 — Transaction of the first Prague Conference, 1956.

E. HILLE

22 — Functionnal Analysis and semi groupe. Amer. Math. Soc. Colloq. Pub. Vol. 31, New-York (1948) .

A. KOLMOGOROV

23 — La trasformation de Laplace dans les espaces linéaires, C. R. Acad. Sci. Paris, 200 (1935) 1717-1718 .

J. MARCINKIEWICZ et A. ZYGMUND

24 — Studia Mathematica, 7 (1938) 116 .

E. MOURIER

25 — Thèse . Paris

26 — Eléments aléatoires dans un espace de Banach. Ann. H. Poincaré, 13 (1953) 161-224 .

27 — L-random elements and L-random elemets in Banach spaces, Proceedings of tlie third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probabilith, Berkeley and Los Angeles, University of California Press, 2 (1956) 231-242 .

O. S. PARASIOUK

28 — Sur le problème de la filtration des processus stationnaires généralisés, Ukrain, Mat. Zurnal 9 (1957) 210-214

PETTIS

29 — On Integretion in Vector Spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 44 (1938)

G. POLYA

30 — Acta Math. , 41 (1917)

A. PRINCSHEIM

31 — Math. Ann. , 41 (1894) 57

YU. PROHOROV

32 — The convergence of random processes and limit theorem in the theory of probability, *Teor. Veroyatnost i Primenen*, I (1956) 177 - 238

33 — The method of characteristic Functions, *Proceedings of the fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Berkeley and Les Angeles University of California Press, 2 (1960) 403-419 .

V. SASANOV

34 — On characteristic functionals, *Teor. Veroyatnost i Primenen*, 3 (1958) 201-205 .

L. SCHWARTZ

35 — *Théorie de distributions*, Paris, Hermann et Cie, 1951 .

SEGAL

36 — Abstract probability spaces and theorem of Kolmogorov, *Amer. J. Math.* 76 (1954) 721-731 .

H. STEINHAUS

37 — *Math. Z.* 31 (1929) 408-416 .

M. ULBRICH

38 — *Transaction of the first Prague Conference*, 1956 .

K. URBANIK

39 — Stochastic processes whose simple function are distributions, *Teor. Veroyatnost i primenen* 1 (1956) 146-149 .

WOLFOWITZ

40 — *Ann. Math. Stat.* 25 (1954) 131 .

K. WINKELBAUER

41 — *Czechosl. Mathem. Journ.*, 6 (1956) 517-521 .

DEUXIÈME THÈSE

Propositions dondées par la Faculté

LES NOMBRES TRANSCENDANTS

Vu et approuvé

Parie le 5 Nevembre 1956

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

J. PERES

Vu

et Permis d'imprimer

Le Recteur de l'Académie
de Paris

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

LES MATHÉMATIQUES TRANSCENDANTES

Imp. de l'Université de Damas

Vu et approuvé

Fait le 7 Novembre 1950

Le Docteur de la Faculté des Sciences

1950

et l'Université d'Alger
Le Recteur de l'Université
de Paris

